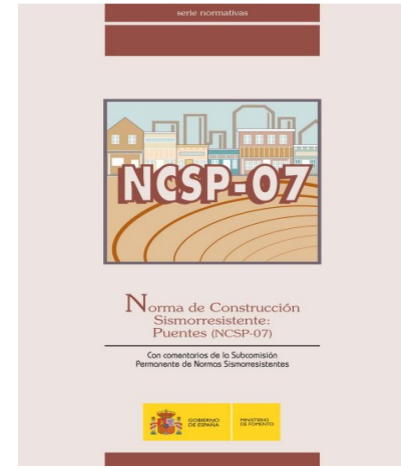
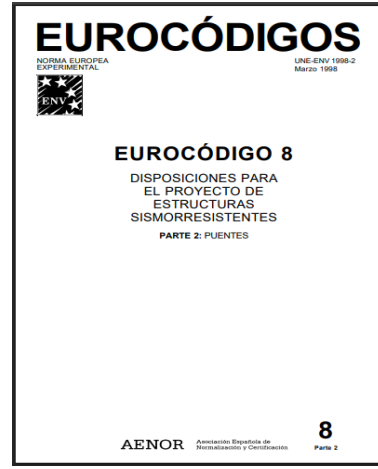
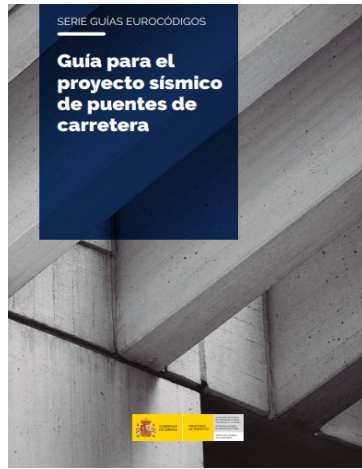


# Cursor Sísmico de Puentes

## Colegio de Ingenieros de Caminos de Cantabria

- Impartido por Julián Díaz del Valle [www.diaval.es](http://www.diaval.es)
- Profesor jubilado de la Escuela de Ingenieros de Santander
- (24 y 25 de Septiembre de 2025)



## *Referencias :*

- Guía para el proyecto sísmico de puentes de carretera
- Eurocódigo 8 . UNE-ENV-1998-2. Puentes
- NCSP-07 Norma Construcción Sismorresistente de Puentes
- Manual programa PONSIS25 de Cálculo Sísmico de Puentes

# INDICE

- Introduccion al análisis dinámico de los puentes frente al sismo.
- Acción Sísmica: Acelerogramas. Integración. Espectros de respuesta
- Influencia de las fuentes, del terreno y del amortiguamiento.
- Comportamiento sísmico: Elástico, de ductilidad limitada, muy dúctil.
- Espectros de diseño : Sismo último, frecuente y de construcción.
- Normas sísmicas aplicables: NCSP-07, Eurocódigo 8 y otras.
- Espectros o curvas de demanda y capacidad.
- Aislamiento sísmico: Neopremos, fricción, amortiguación.

# INDICE (continuación)

- Métodos de Cálculo :
- Cálculo modal espectral en puentes regulares e irregulares
- Método del Modo Fundamental: Modelo de Tablero Rígido y Flexible  
Modelización de la masa, rigidez y amortiguamiento.
- Métodos No Lineales :
  - Método dinámico no lineal (Integración de acelerogramas compatibles con el espectro objetivo)
  - Método estático no lineal o del empuje incremental (Pushover)
- \* Ejemplos de aplicación

# INTRODUCCION

Este curso tiene la duración de 5 horas lectivas, impartido en dos jornadas y se dividirá en 2 partes : “Curso Sísmico de Puentes” y “Curso Sísmico de Edificios”.

Se presentan una serie de diapositivas cuyo orden no corresponde exactamente al índice “estructurado” del curso.

Estas diapositivas están basadas en las referencias indicadas : “Guía para el proyecto sísmico de puentes de carretera” editada por Fomento, la normativa sismorresistente española NCSP-07 y NCSE-02, así como en el manual del programa PONSIS25.

Comenzará con unas nociones de sismología. Acelerogramas y espectros (cálculo y formatos). Seguirá con la descripción del comportamiento estructural (elástico, moderadamente dúctil y muy dúctil).

Se describirá la problemática del aislamiento, y se analizarán distintos dispositivos aisladores y de disipación.

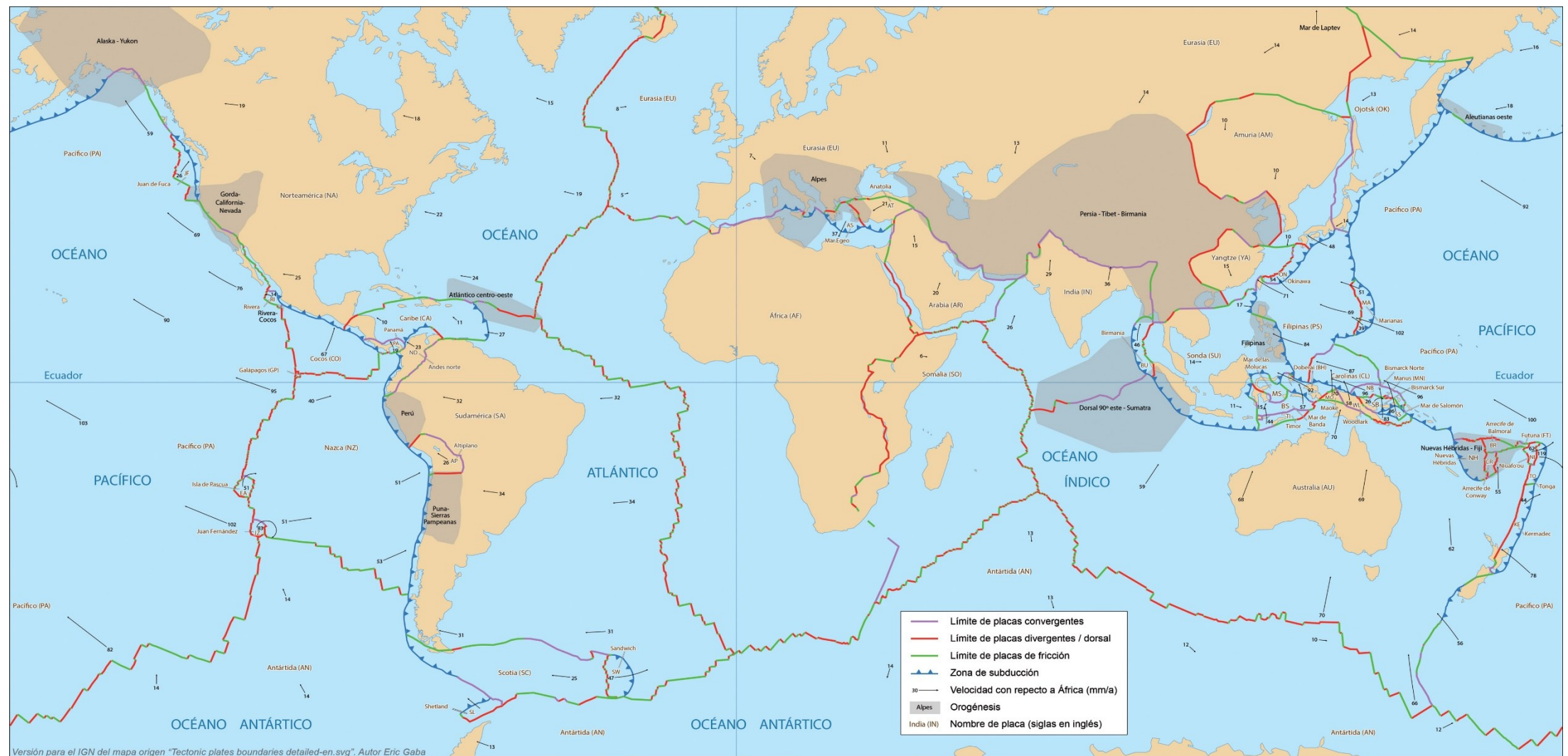
Aunque en el Índice, seguirían los Métodos de Cálculo Lineales : Cálculo Modal Espectral y el Método del Modo Fundamental, el primero, se analizará con detalle en la 2ª parte dedicada al “Curso Sísmico de Edificios” , y el segundo –esencia del curso- , se tratará al final acompañado de varios casos prácticos.

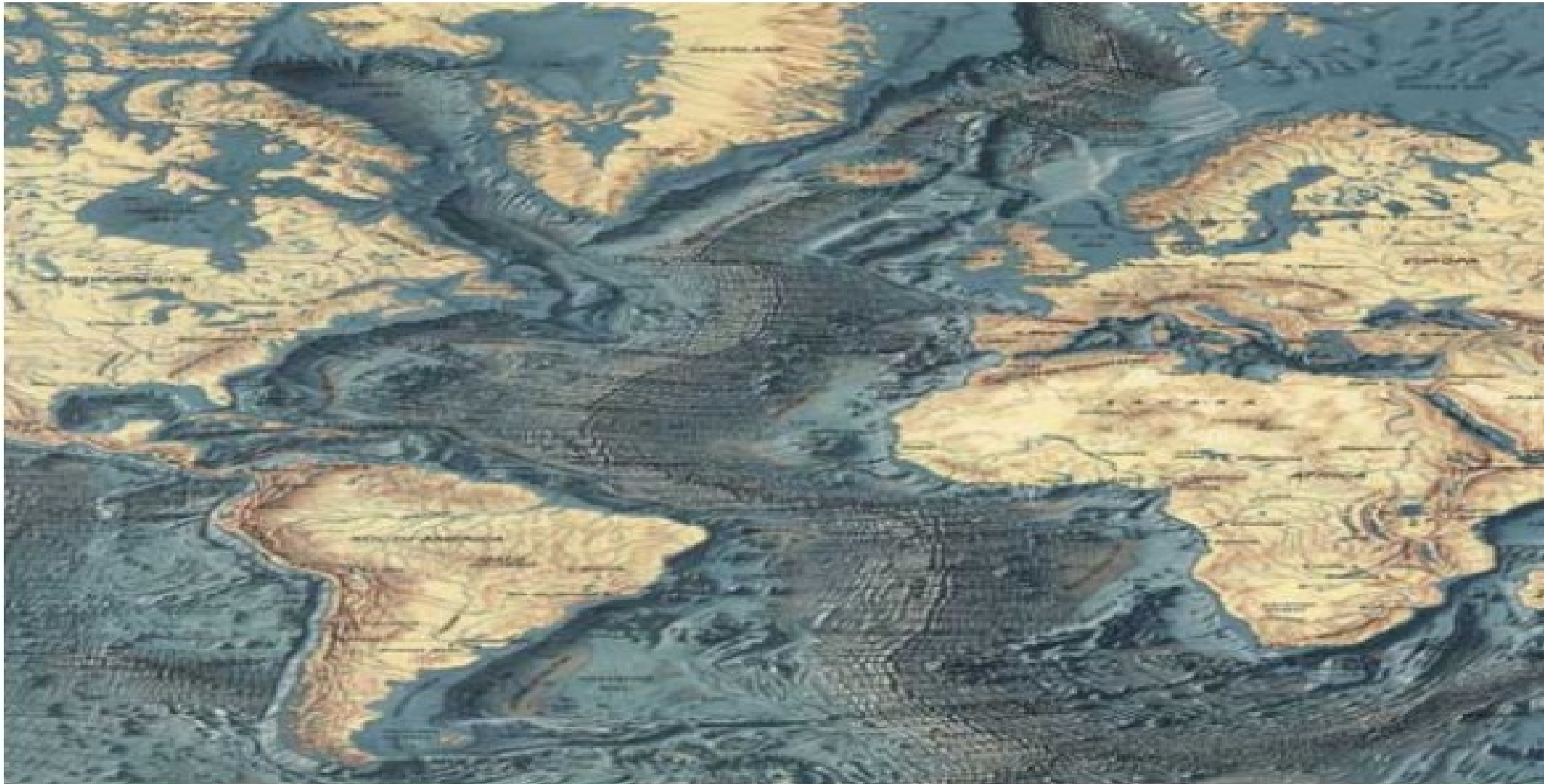
Los Métodos No Lineales (dinámico y estático) que debieran seguir, ya se habrán visto al analizar comportamientos y aislamientos.

En la segunda parte –dedicada al Cálculo Sísmico de Edificios- se aplicará gran parte de lo visto para los puentes, por lo que sólo se describirán las pequeñas diferencias respecto de la acción sísmica de las normativas NCSE-02 y Eurocodigos.

Allí, analizaremos con detalle el tema pendiente, del análisis modal espectral, aplicándolo al caso de un solo grado de libertad por dirección y planta y otros métodos simplificados recogidos en las normas.

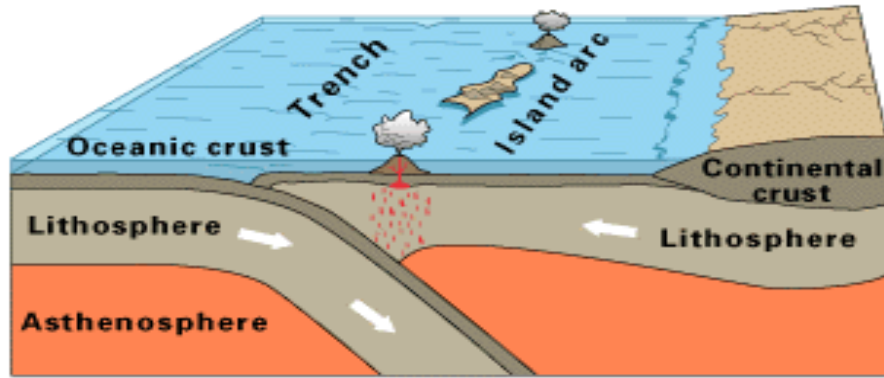
# Placas de la corteza terrestre



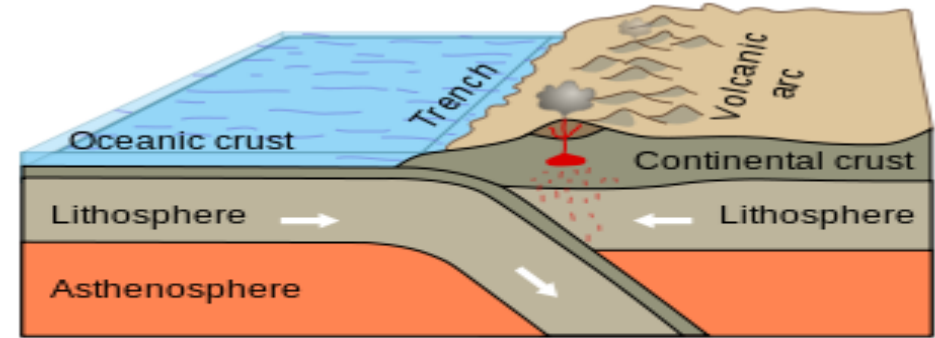


**Dorsal oceánica o cordillera submarina del Océano Atlántico | Fuente: Marie Tharp, Bruce Heezen y Heinrich Berann (1977).**

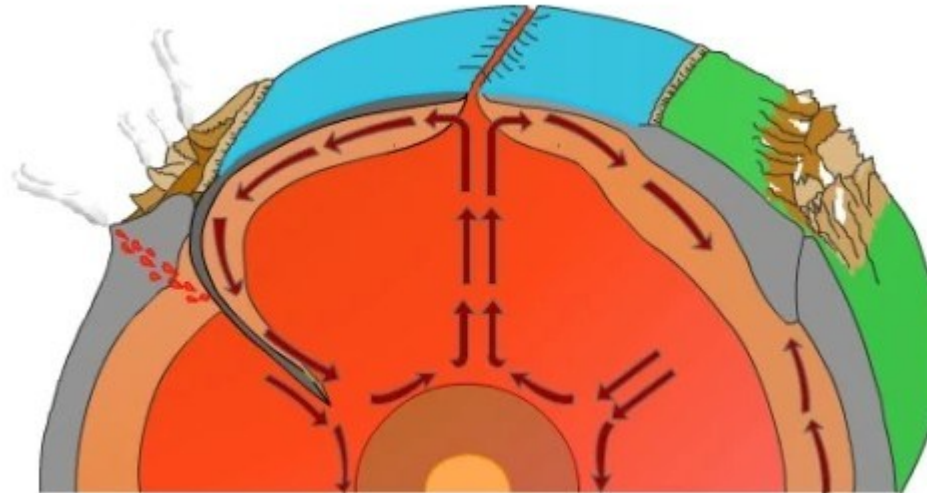




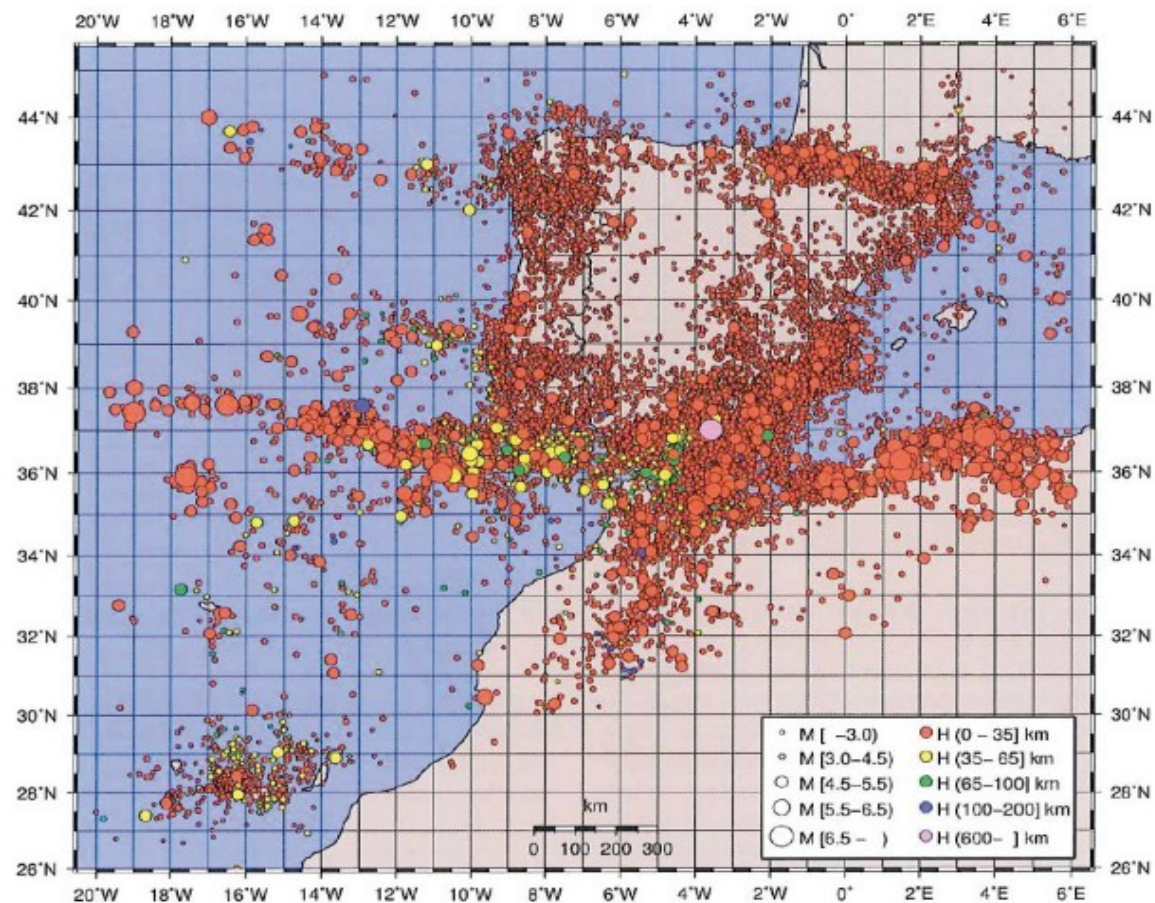
Oceanic-oceanic convergence



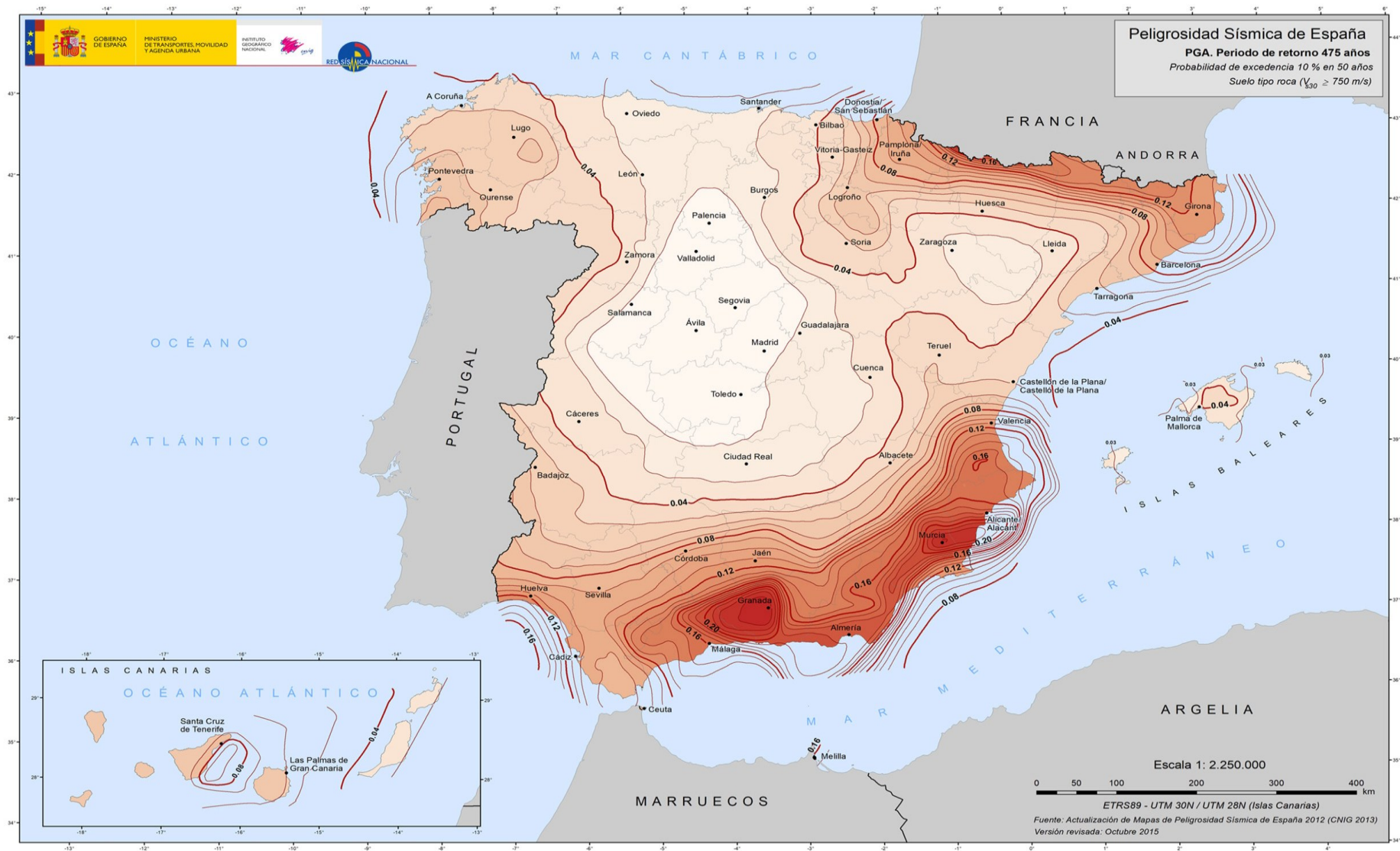
Placa oceánica vs placa continental







**Figura 1 Epicentros, magnitud y profundidad de todos los sismos del catálogo sísmico del IGN hasta 2011**



[www.ign.es/web/ign/porta/sis-peligrosidad-sismica](http://www.ign.es/web/ign/porta/sis-peligrosidad-sismica)



# Colapsos sísmicos de puentes :



Figura 2 Colapso de varios tramos del tablero por pérdida de apoyo  
(Puente sobre el Río Tubul, Chile, terremoto de Concepción -27 de febrero de 2010-.  
Fotografía de Nicolás Piwonka, National Geographic)



Figura 3 Fallo del alma de una viga por ausencia de diafragmas (terremoto de Concepción  
-27 de febrero de 2010-)



Figura 4 Colapso de una pila por proyecto inadecuado de la rótula plástica (autopista de Santa Mónica, terremoto de Northridge -17 de enero de 1994-. Fotografía de M. Celebi, US Geological Survey)

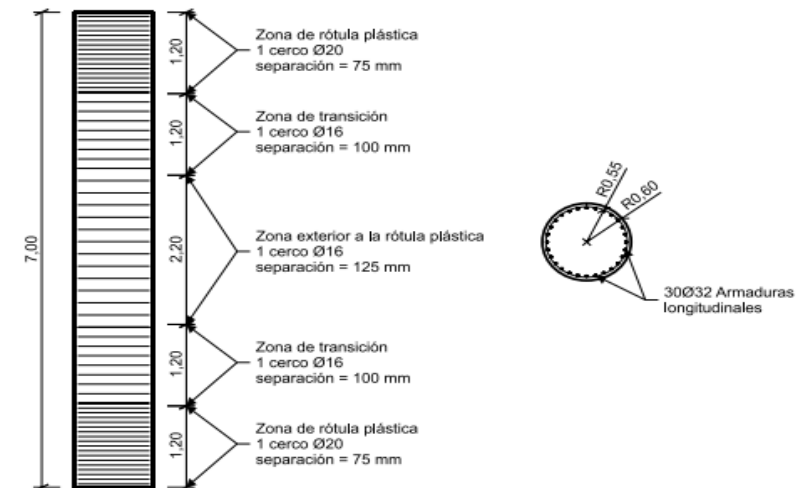
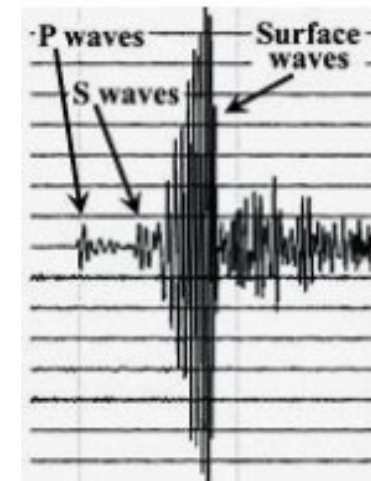
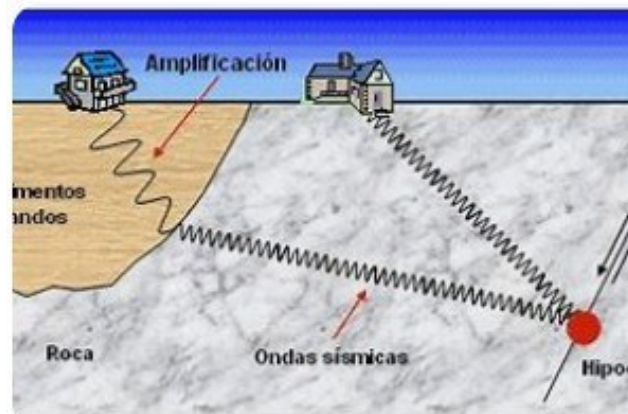
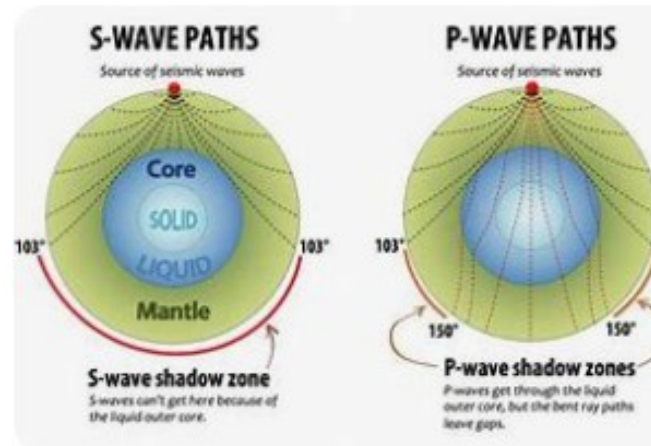
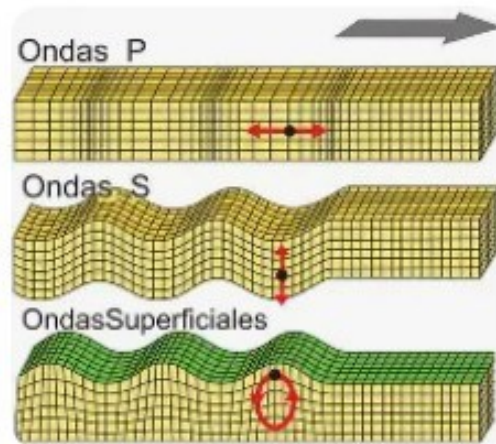


Figura 116 Armado de la pila

# ONDAS SISMICAS DE VOLUMEN (P y S) Y SUPERFICIALES (R y L)



# ACELEROGRAMAS Y ESPECTROS

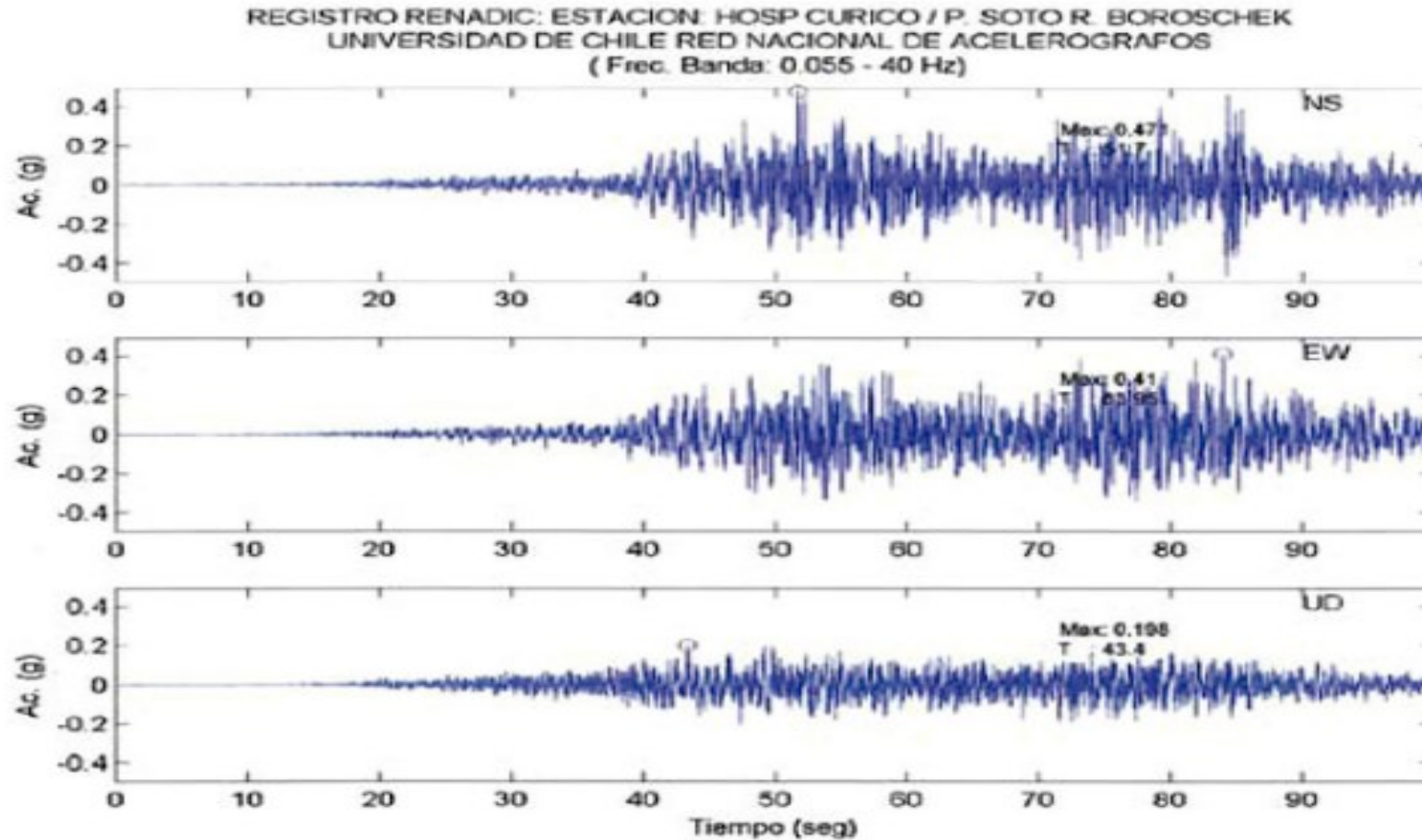
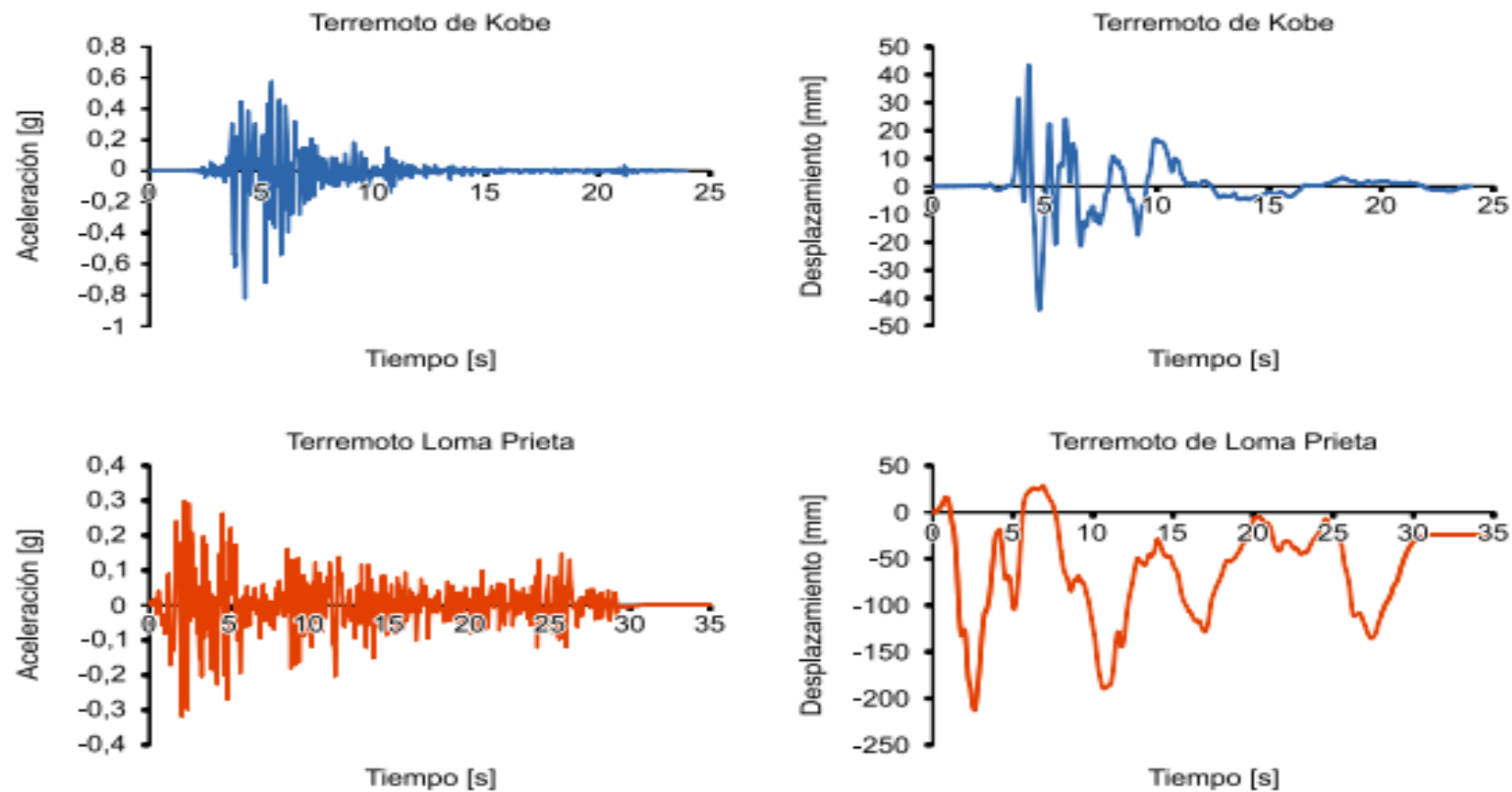
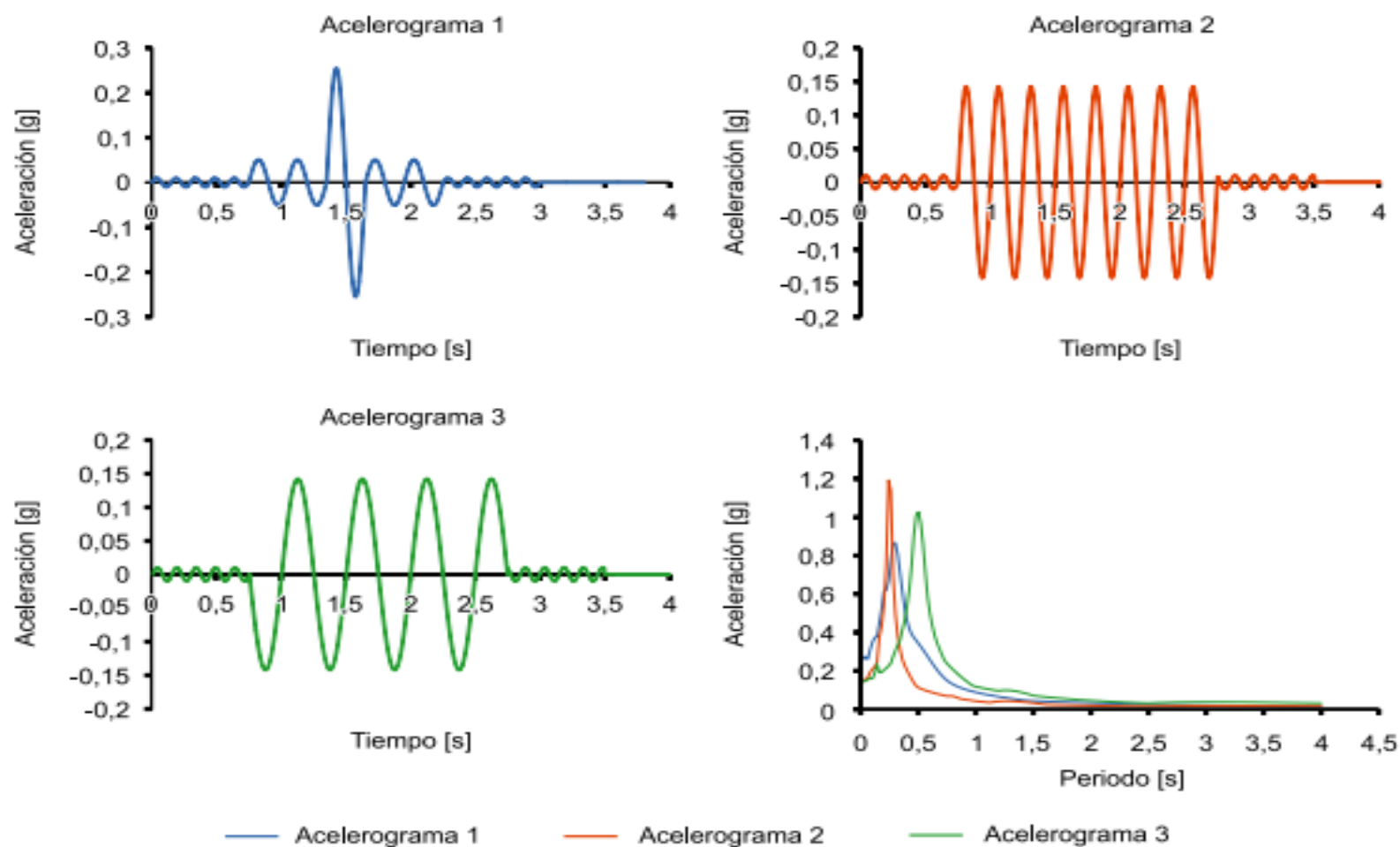


Figura 9 Ejemplos de acelerogramas registrados en tres direcciones durante el sismo de Concepción de 2010 en el Hospital de Curicó



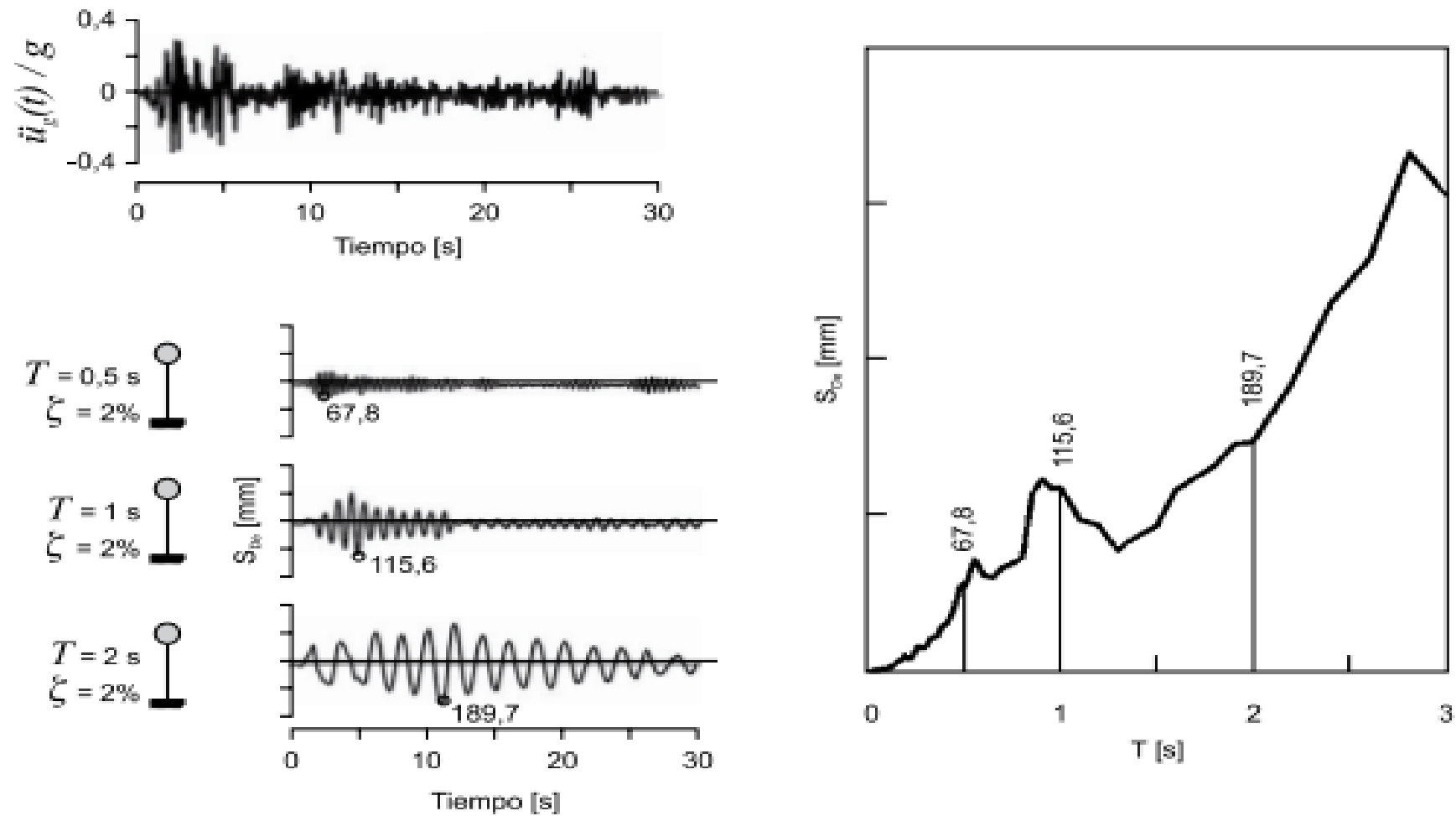


**Figura 11** Acelerogramas y desplazamientos obtenidos por doble integración



**Figura 10 Ejemplos de acelerogramas y espectros de respuesta asociados**





**Figura 12** Acelerograma, respuesta de tres sistemas de 1gdl y desplazamiento máximo en función del periodo

$\ddot{x}$

Características sistema :

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad ; \quad T = 2\pi/\omega$$

$$\xi = \frac{c}{c_c} \quad ; \quad C_c = \sqrt{(KM)}$$

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

Ecuación del movimiento :

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = -M\ddot{x}_g(t)$$

Integral de Duhamel :

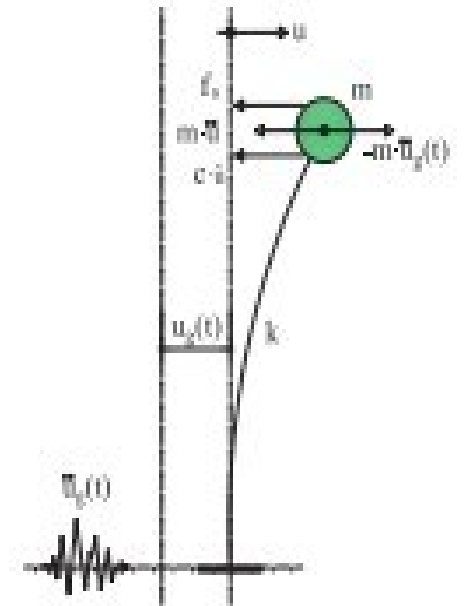
$$x = \int_0^t e^{-\xi\omega(t-\tau)} \left( \frac{\ddot{x}_g(\tau)}{\omega_d} \text{sen}[\omega_d(t-\tau)] \right) d\tau$$

Espectros :

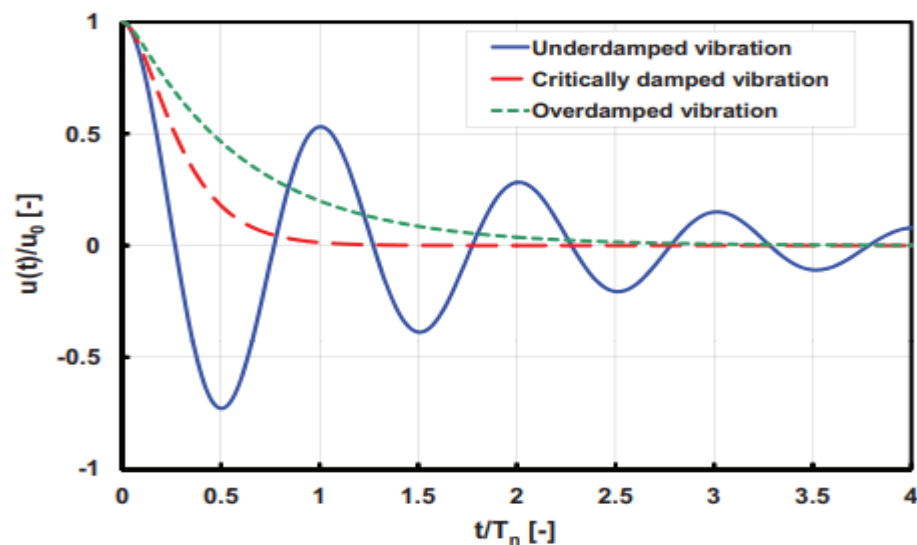
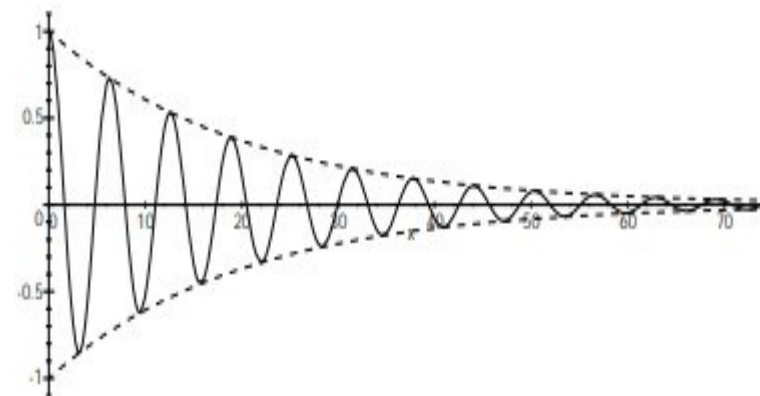
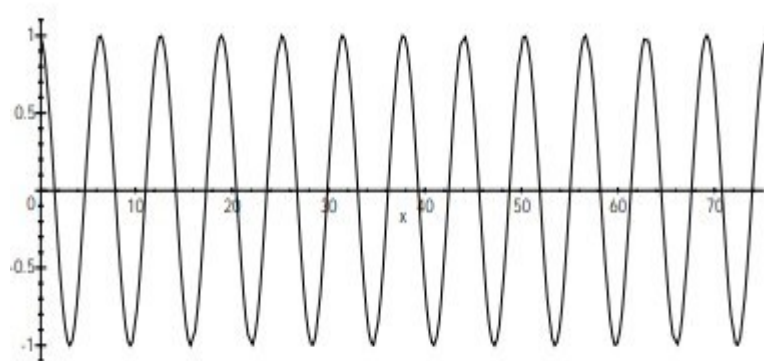
$$x(t)_{\max} = S_{De}(T, \xi) = S_{De}$$

$$\dot{x}(t)_{\max} = S_{Ve} = \omega S_{De} = \frac{2\pi}{T} S_{De}$$

$$\ddot{x}(t)_{\max} = S_e = \omega^2 S_{De} = \frac{4\pi^2}{T^2} S_{De}$$



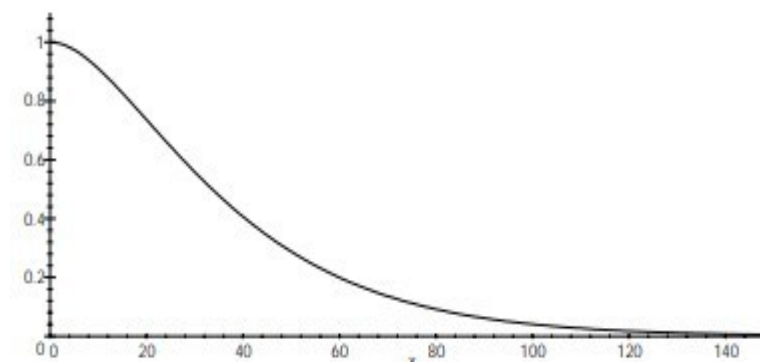
**Vibraciones libres : NO amortiguadas ( $C=\zeta=0$ ) , subamortiguadas ( $C < C_c$  ó  $\zeta < 1$ ) , sobreamortiguadas ( $C > C_c$  ó  $\zeta > 1$ ) y críticamente amortiguadas ( $C = C_c$  ó  $\zeta = 1$ )**

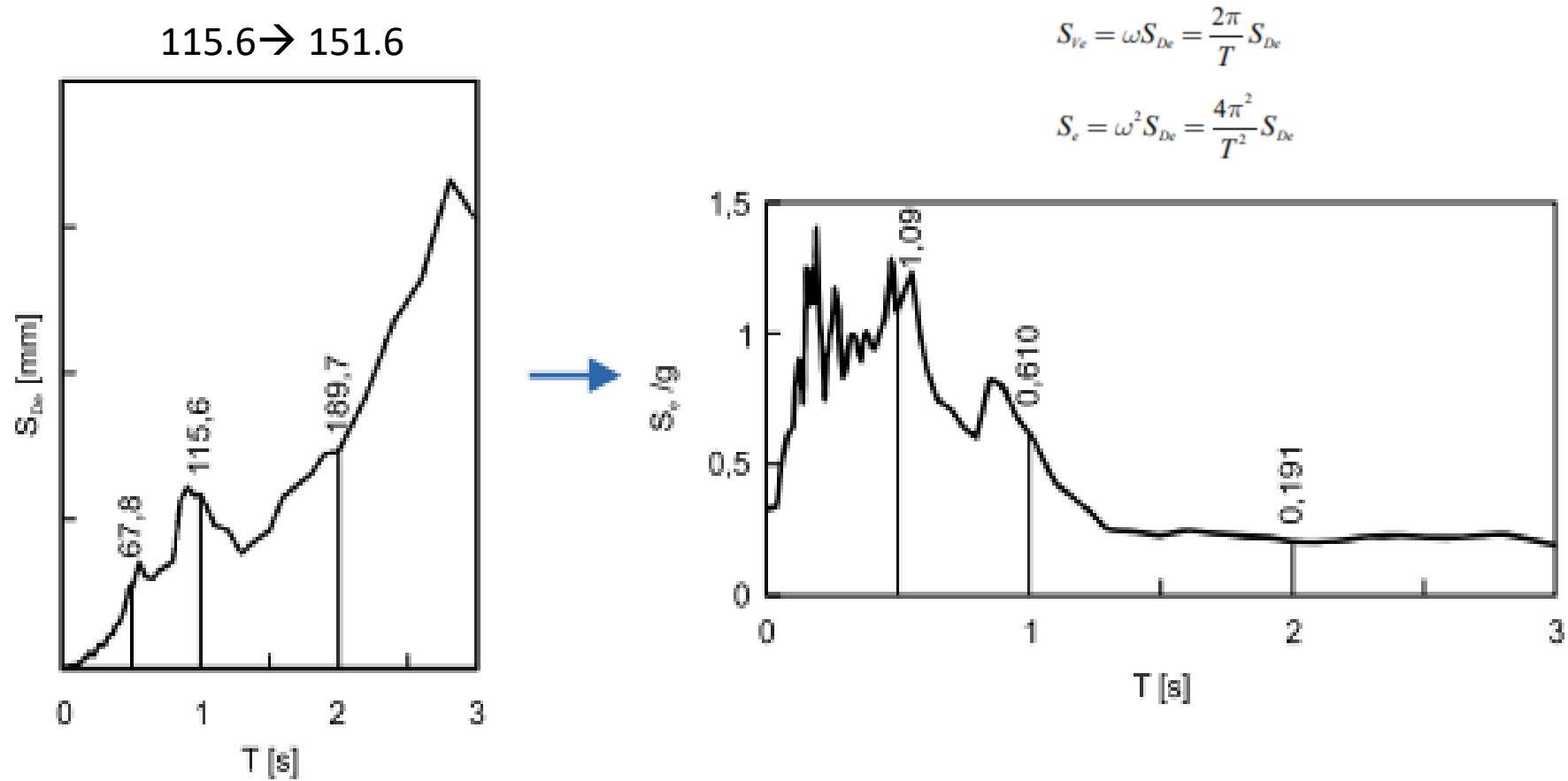


$$C < C_c$$

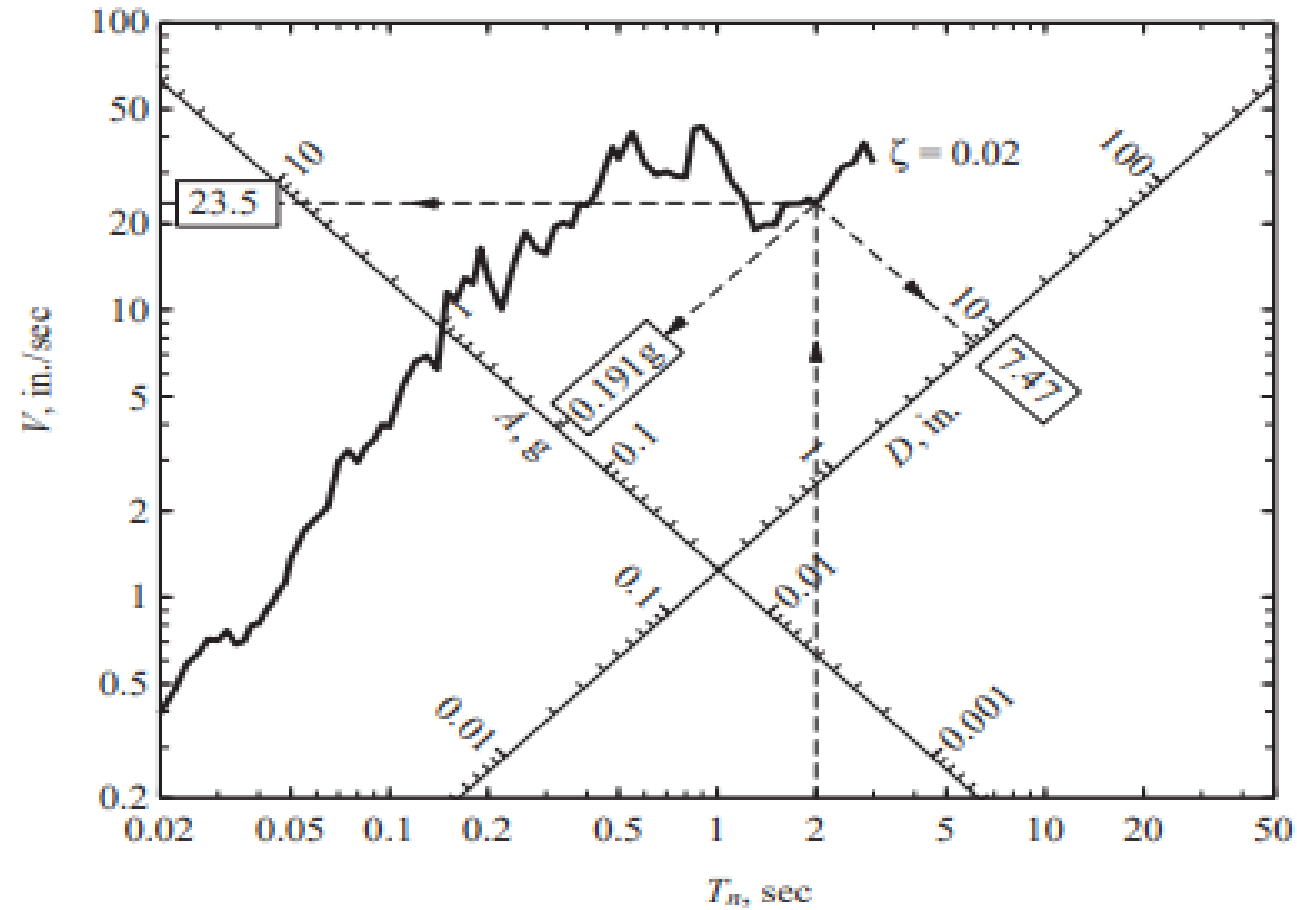
$$C_c = \sqrt{KM}$$

$$C > C_c$$





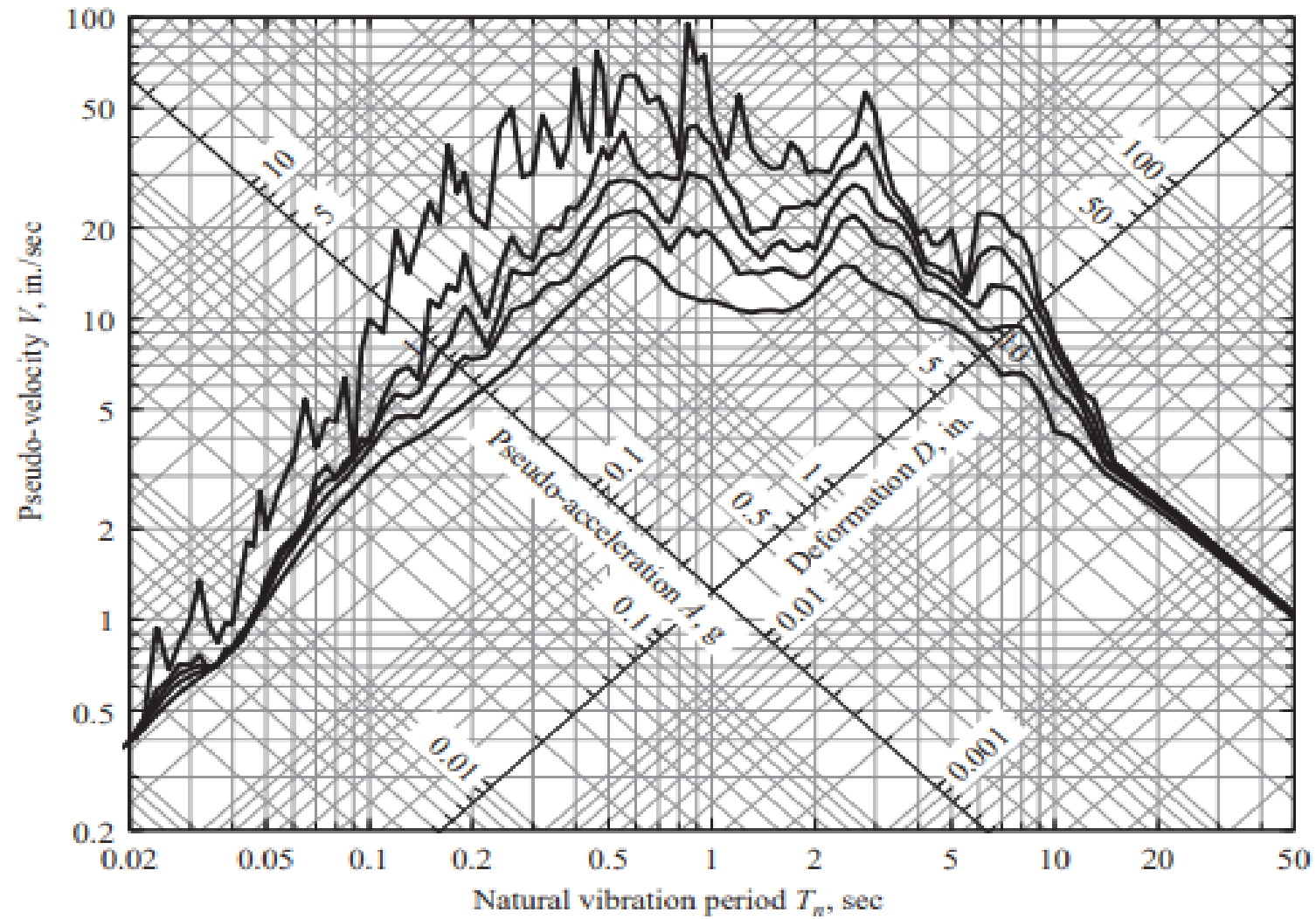
**Figura 13** Espectro de pseudo-aceleraciones, normalizado por  $g$ , a partir del espectro de desplazamientos de la Figura 12



**Figure 6.6.3** Combined  $D$ – $V$ – $A$  response spectrum for El Centro ground motion;  $\zeta = 2\%$ .

$$S_{Ve} = \omega S_{De} = \frac{2\pi}{T} S_{De}$$

$$S_e = \omega^2 S_{De} = \frac{4\pi^2}{T^2} S_{De}$$



**Figure 6.6.4** Combined  $D$ – $V$ – $A$  response spectrum for El Centro ground motion;  $\zeta = 0, 2, 5, 10$ , and  $20\%$ .

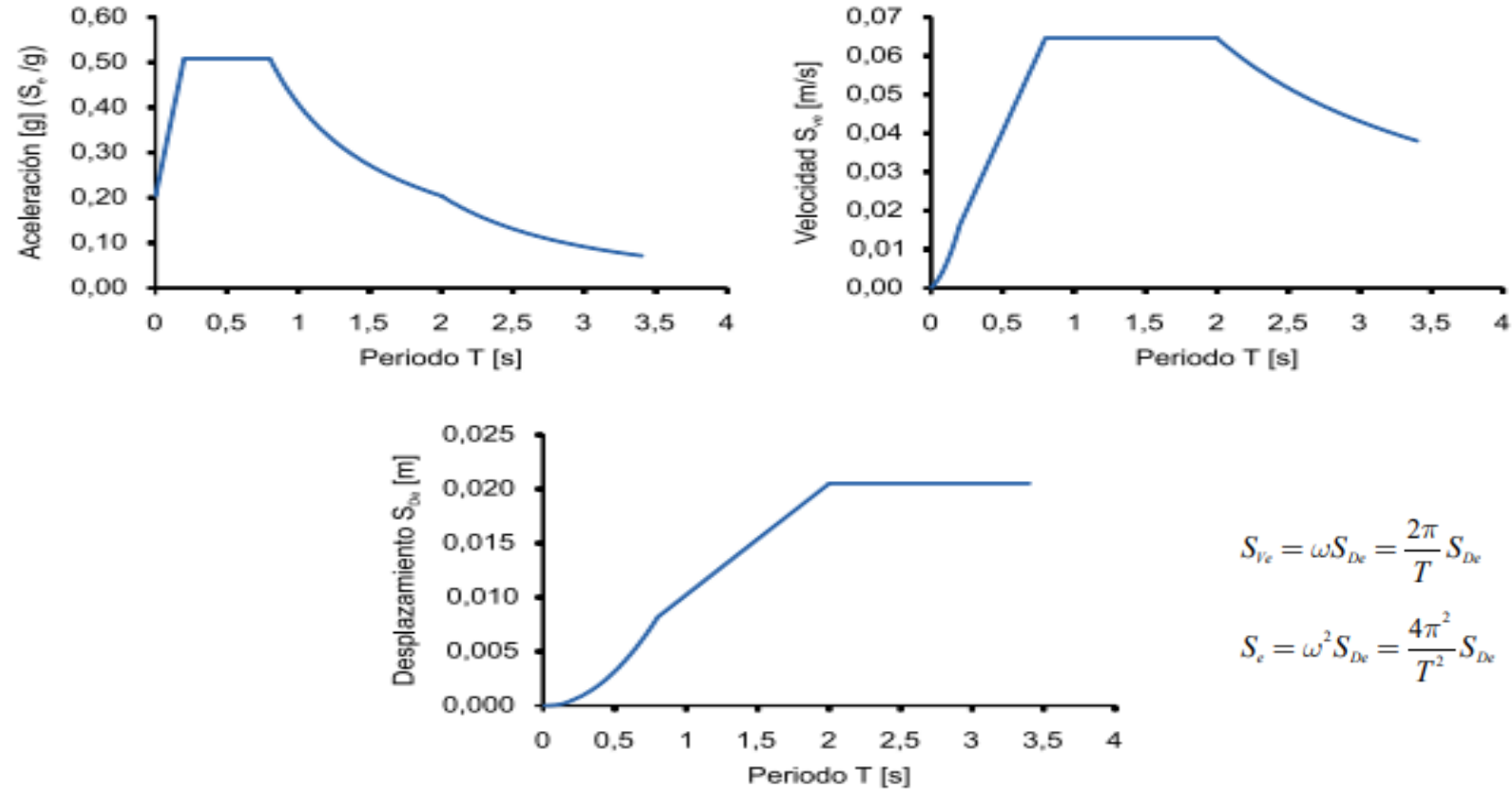


Figura 14 **Forma del espectro de respuesta. Aceleraciones absolutas, velocidades relativas y desplazamientos relativos**



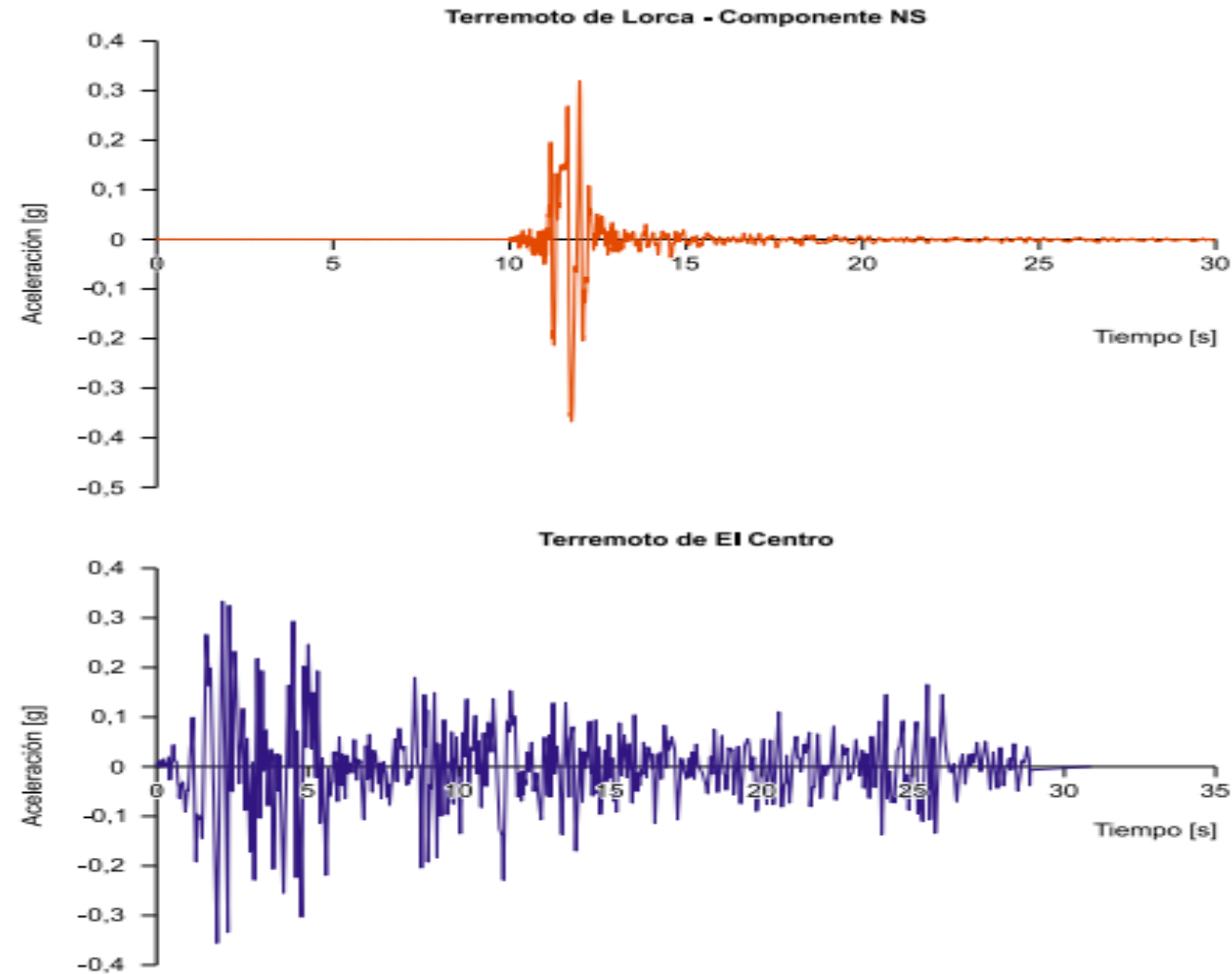
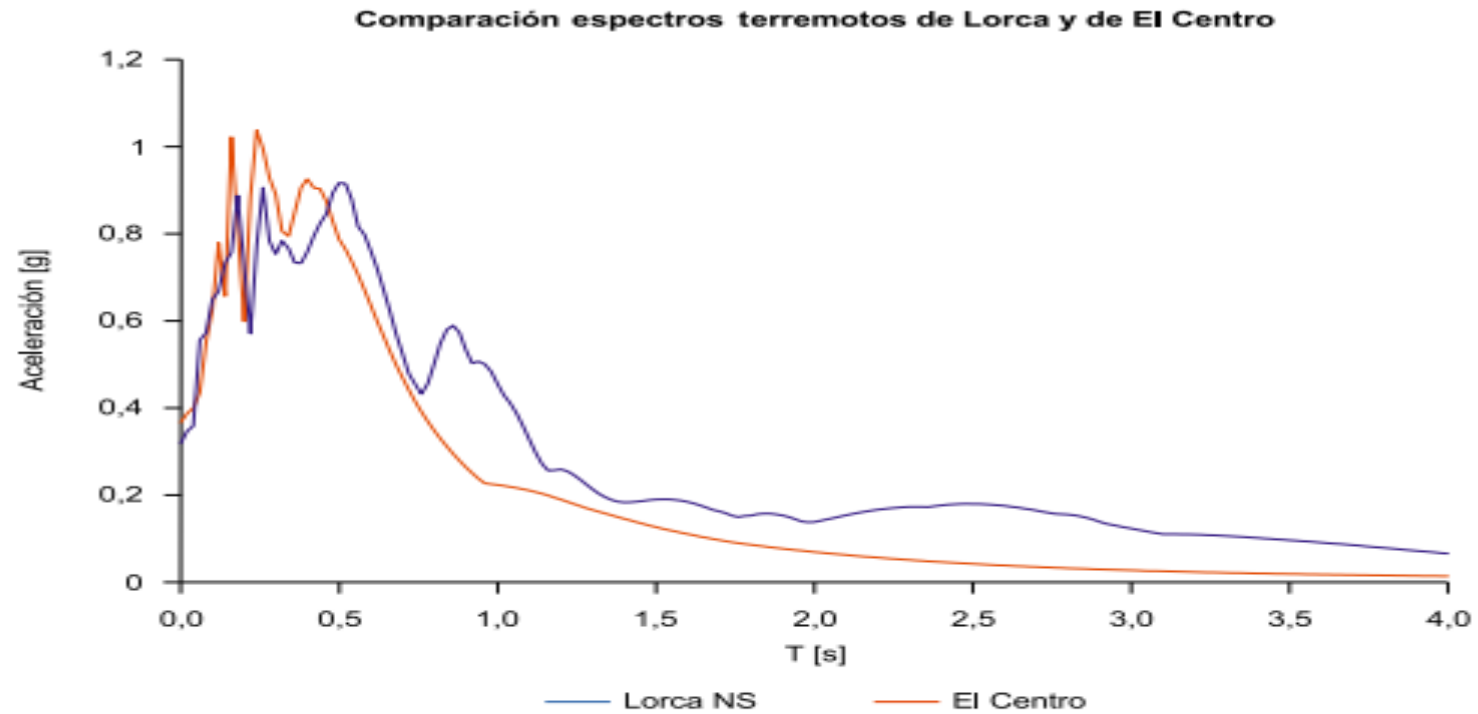


Figura 15 Acelerogramas del terremoto de Lorca (de campo cercano) y del terremoto del Centro (de campo lejano), normalizados por  $g$



**Figura 16** Espectros de respuesta elásticos para un 5% de amortiguamiento correspondientes a los acelerogramas de la Figura 15, normalizados por  $g$

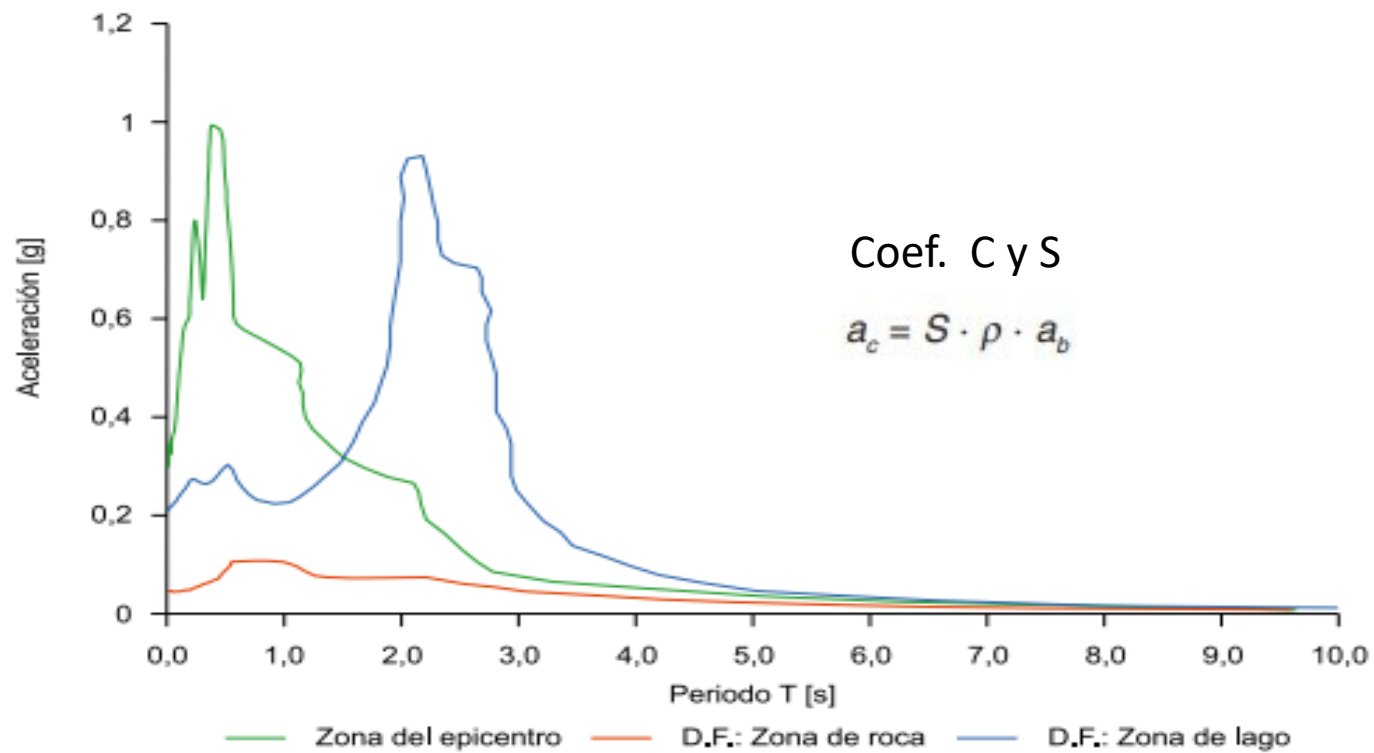
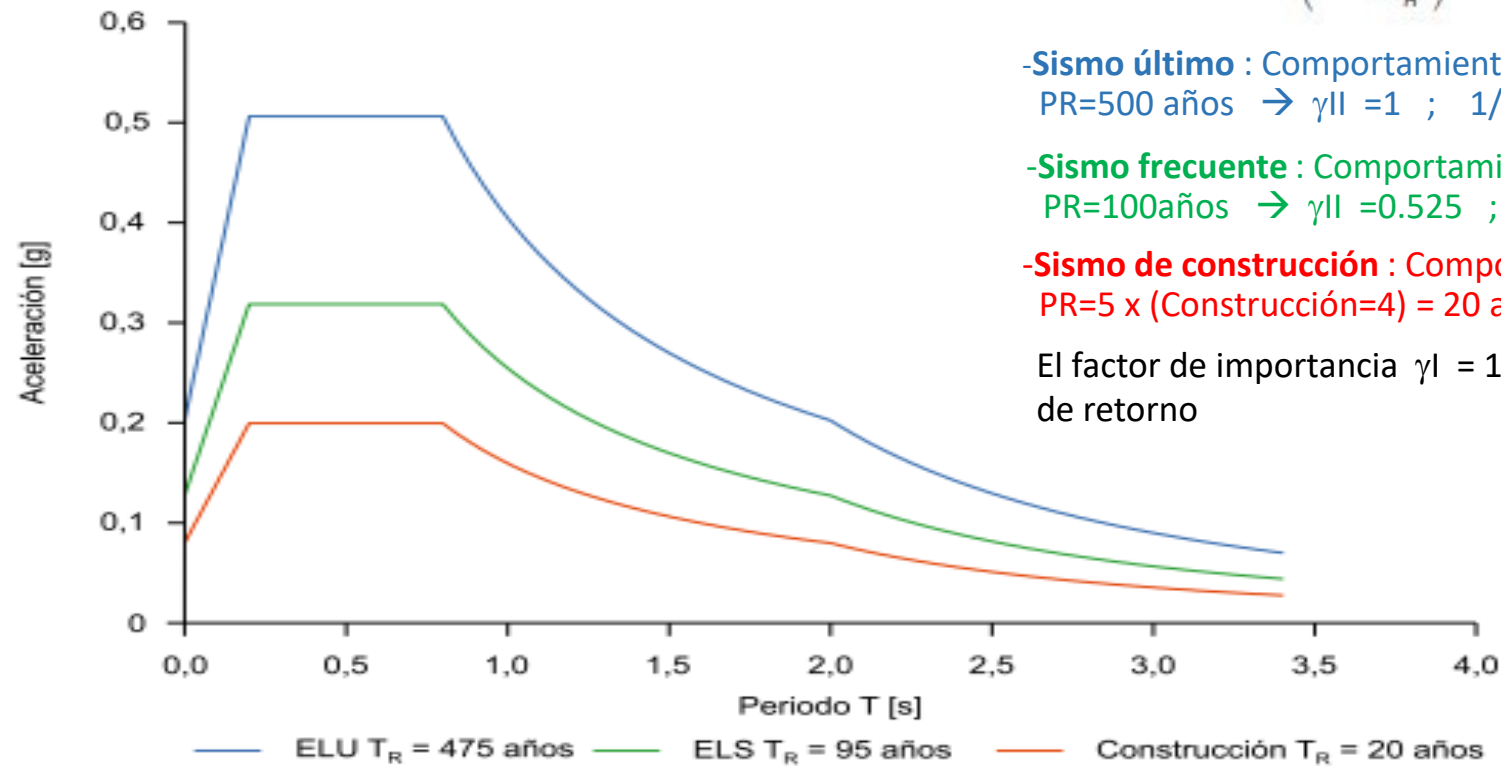


Figura 17 Espectro de aceleraciones del sismo de ciudad de México en el epicentro, en la zona del lecho del lago y en la zona de afloramiento de la roca

$$a_c = S \cdot \rho \cdot a_b \quad \rho = \gamma_I \cdot \gamma_{II} \quad \gamma_{II} = (P_R / 500)^{0,4}$$

PR= Periodo de retorno ; L = Vida útil =100 años

$$\text{Prob. excedencia} = \phi = 1 - \left(1 - \frac{1}{P_R}\right)^L \quad P_R \gg L \text{ resulta } \phi \approx L/P_R$$



-**Sismo último** : Comportamiento dúctil. Limitado o elástico:

PR=500 años  $\rightarrow \gamma_{II} = 1$  ;  $1/PR = 0.002$  ;  $\mathcal{P} = 18.1\%$

-**Sismo frecuente** : Comportamiento elástico:

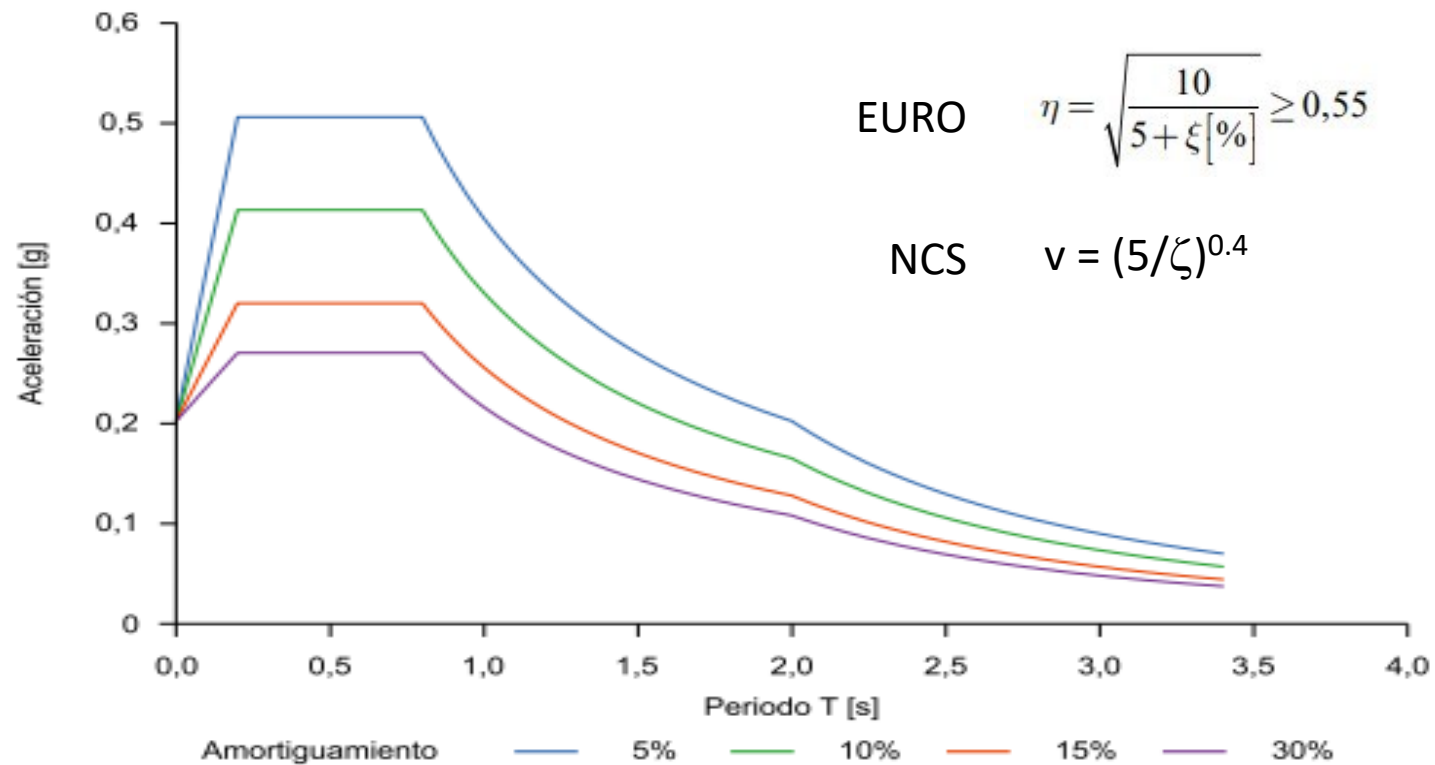
PR=100años  $\rightarrow \gamma_{II} = 0.525$  ;  $1/PR = 0.01$  ;  $\mathcal{P} = 63.4\%$

-**Sismo de construcción** : Comportamiento dúctil. Limitado o elástico:

PR=5 x (Construcción=4) = 20 años  $\rightarrow \gamma_{II} = 0.28 \rightarrow$  Tumba el espectro

El factor de importancia  $\gamma_I = 1.3$  ( $=2^{0.4}$ ) equivale a duplicar el periodo de retorno

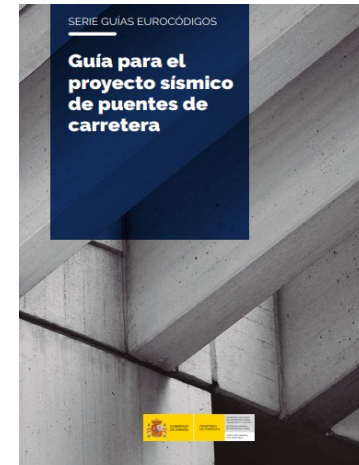
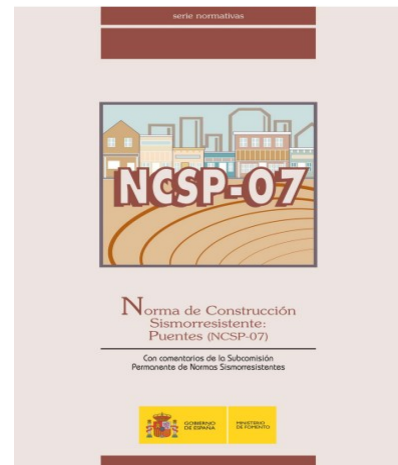
Figura 19 Espectros de respuesta asociados a los requisitos fundamentales y a la fase de construcción



**Figura 18 Efecto del amortiguamiento en el espectro elástico de respuesta**

# Espectros de respuesta y de cálculo según normativas

Norma	-- Aceleración sísmica --		Espectro de		Espectro de
	básica (PGA)	de cálculo	---- aceleraciones ---- elástico	de cálculo	--- desplazamientos---- (a multiplicar por q)
NCSP-07 :	ab	$ac = S \cdot \rho \cdot ab$	Sa(T)	$Sar(T) = Sa(T) / q$	$Sd(T) = Sa(T) \cdot (T/2\pi)^2$
Eurocodigo 8 :	agR	$ag = \gamma I \cdot agR$	Se(T)	Sd(T)	$SDe(T) = Se(T) \cdot (T/2\pi)^2$



Espectro elástico de acel. horizontal  $S_a(T)$

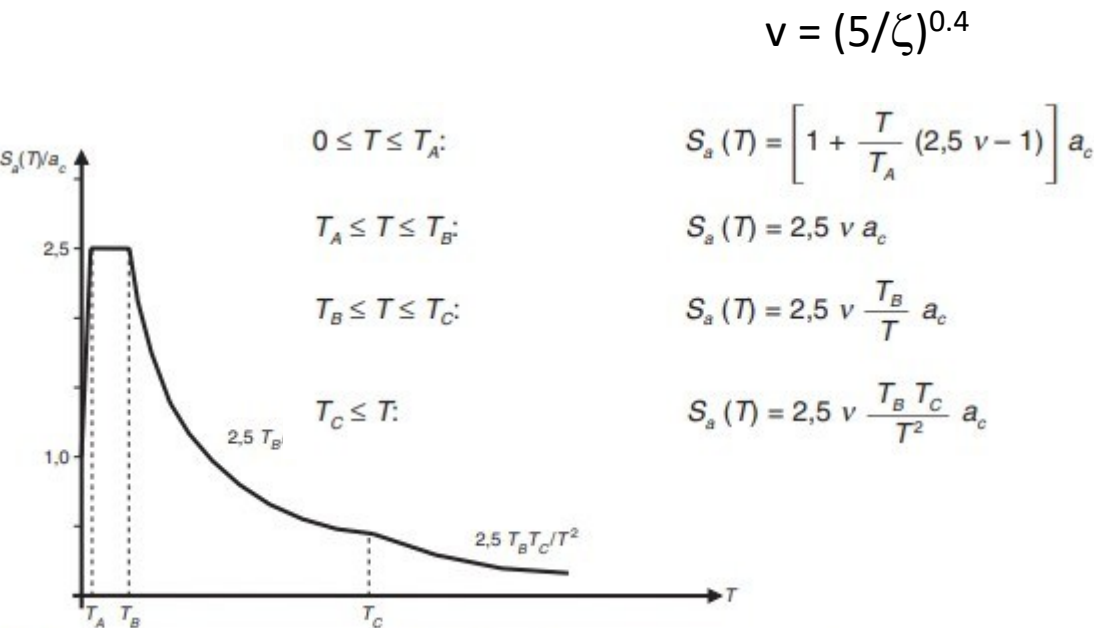


Figura 3.2 Forma del espectro de respuesta de aceleraciones para un índice de amortiguamiento  $\zeta = 5\%$

$$a_c = S \cdot \rho \cdot a_b$$

$S$  Coeficiente de amplificación del terreno. Toma el valor:

— Para  $\rho \cdot a_b \leq 0,1 g$

$$S = \frac{C}{1,25}$$

— Para  $0,1 g < \rho \cdot a_b < 0,4 g$

$$S = \frac{C}{1,25} + 3,33 \left( \rho \frac{a_b}{g} - 0,1 \right) \left( 1 - \frac{C}{1,25} \right)$$

— Para  $0,4 g \leq \rho \cdot a_b$

$$S = 1,0$$

$C$  Coeficiente del terreno definido en el apartado 3.2.

$C = 1 ; 1.3 ; 1.6 ; 2$  para suelos I ; II, III y IV

Sismo último de cálculo	Sismo frecuente de cálculo Sismo de construcción
$T_A = K C / 10$ $T_B = K C / 2,5$ $T_C = K (2 + C)$	$T_A = K C / 20$ $T_B = K C / 5$ $T_C = K (1 + 0,5 C)$

Espectro reducido o de cálculo  $S_{ar}(T) = S_a(T) / q$

Espectro de respuesta acel. vertical =  $0.7 S_a(T)$



## Espectro de respuesta elástico y de cálculo Eurocódigo 8

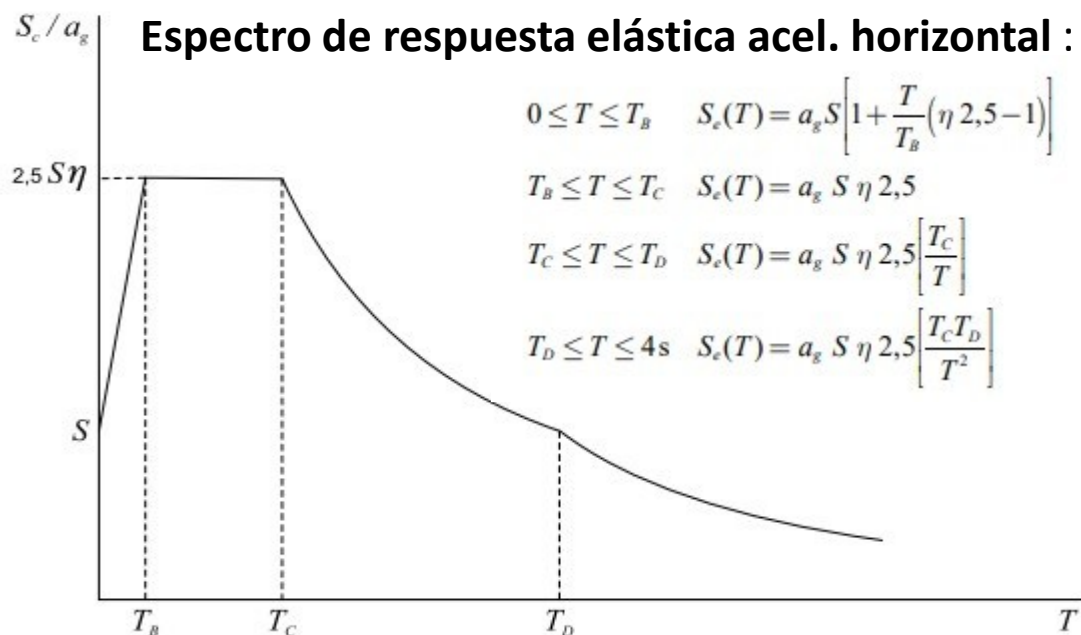


Figura 70 Forma del espectro de respuesta elástico (Figura 3.1 de UNE-EN 1998-1)

Tabla 9 Valores de los parámetros que describen el espectro elástico de respuesta horizontal (Tabla AN/2 de AN/UNE-EN 1998-1)

Tipo de suelo	$S$	$T_B$ [s]	$T_C$ [s]	$T_D$ [s]
A	1	$T_C/5$	$K/4$	2,0
B	$a_g \leq 0,1 g \quad S = C$	$T_C/5$	$KC/4$	2,0
C	$0,1 g \leq a_g \leq 0,4 g \quad S = C + 3,33 \left( \frac{a_g}{g} - 0,1 \right) (1,0 - C)$			
	$a_g > 0,4 g \quad S = 1$			
D	$a_g \leq 0,1 g \quad S = 2$	$T_C/5$	$K/2$	2,0
	$0,1 g \leq a_g \leq 0,4 g \quad S = 2,33 - 3,33 \frac{a_g}{g}$			
	$a_g > 0,4 g \quad S = 1$			

Donde  $C = (800/v_{s,30})^{0,465}$  (con  $v_{s,30}$  en m/s) y  $K$  se establece en 3.2.1(2) de AN/UNE-EN 1998-1.

### Espectro de acel. horiz. de cálculo :

$$\begin{aligned}
 0 \leq T \leq T_B \quad S_d(T) &= a_g S \left[ \frac{2}{3} + \frac{T}{T_B} \left( \frac{2,5}{q} - \frac{2}{3} \right) \right] \\
 T_B \leq T \leq T_C \quad S_d(T) &= a_g S \frac{2,5}{q} \\
 T_C \leq T \leq T_D \quad S_d(T) &= \begin{cases} a_g S \frac{2,5}{q} \left[ \frac{T_C}{T} \right] \\ \geq \beta a_g \end{cases} \\
 T_D \leq T \quad S_d(T) &= \begin{cases} a_g S \frac{2,5}{q} \left[ \frac{T_C T_D}{T^2} \right] \\ \geq \beta a_g \end{cases}
 \end{aligned}$$

### Espectro de respuesta elástico vertical:

$$\begin{aligned}
 0 \leq T \leq T_B \quad S_{ve}(T) &= a_{vg} \left[ 1 + \frac{T}{T_B} (\eta 3,0 - 1) \right] \\
 T_B \leq T \leq T_C \quad S_{ve}(T) &= a_{vg} \eta 3,0 \\
 T_C \leq T \leq T_D \quad S_{ve}(T) &= a_{vg} \eta 3,0 \left[ \frac{T_C}{T} \right] \\
 T_D \leq T \leq 4s \quad S_{ve}(T) &= a_{vg} \eta 3,0 \left[ \frac{T_C T_D}{T^2} \right]
 \end{aligned}$$

$$a_{vg}/a_g = 0.7 ; T_{vB}/T_B = 1 ; T_{vC}/T_C = 0.75 ; T_{vD}/T_D = 1$$

# Espectros elásticos de campo lejano y cercano UNE-EN-1998-1

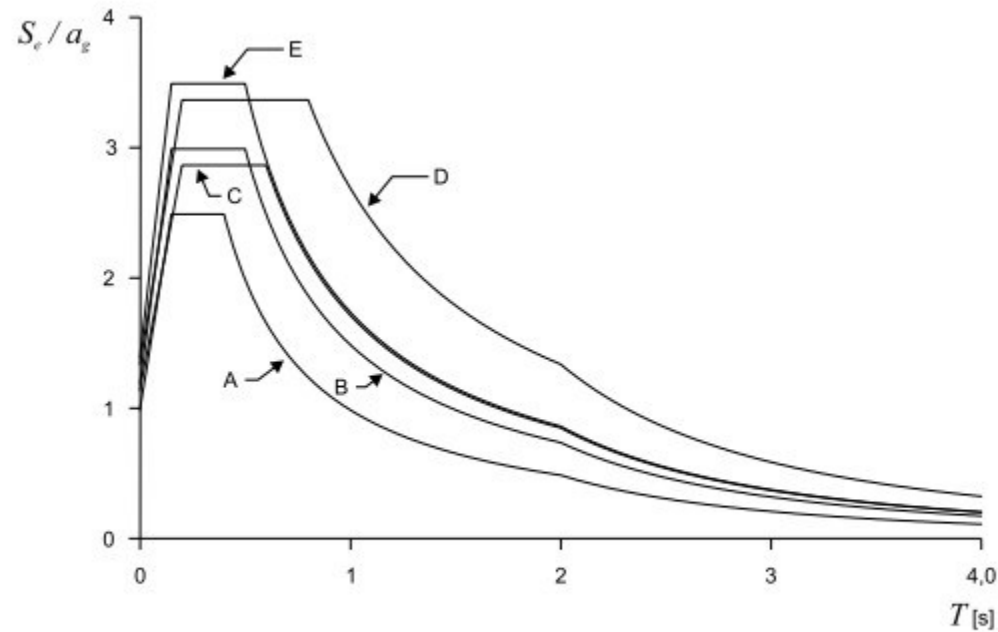


Figura 71 Espectro recomendado de respuesta elástica tipo 1 para terrenos tipo A a E (5% de amortiguamiento) (Figura 3.2 de UNE-EN 1998-1)

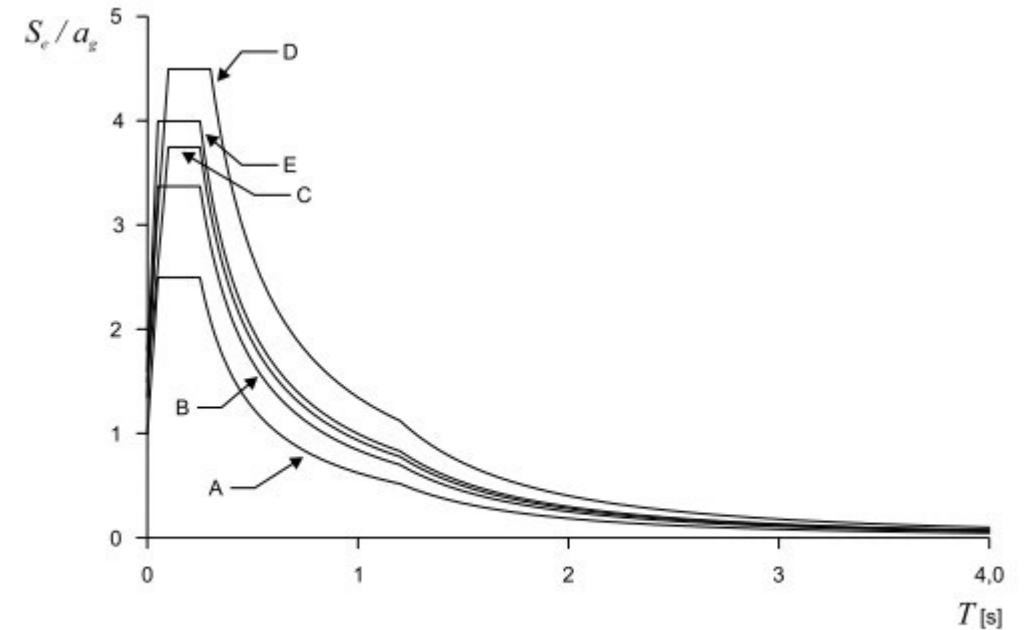


Figura 72 Espectro recomendado de respuesta elástica tipo 2 para terrenos tipo A a E (5% de amortiguamiento) (Figura 3.3 de UNE-EN 1998-1)

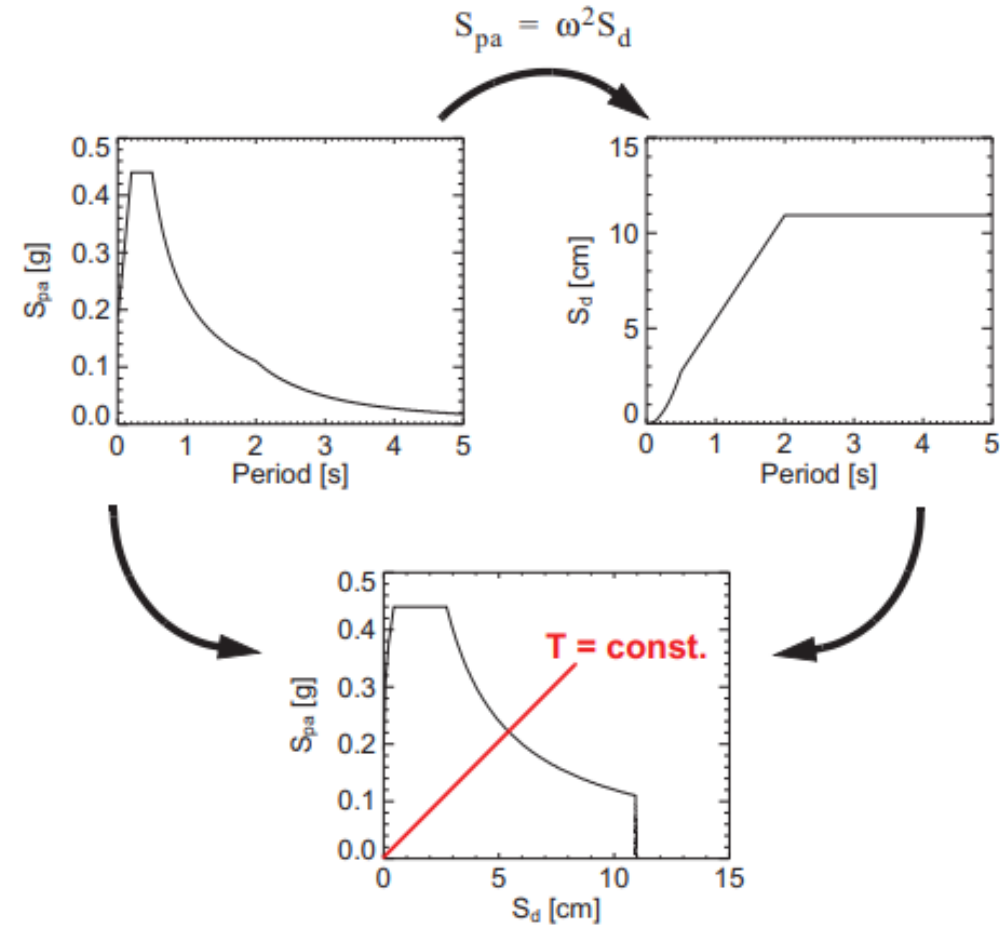
Tabla 7 Valores de los parámetros recomendados que describen el espectro de respuesta elástico horizontal tipo 1 –sismo de campo lejano– (Tabla 3.2 de UNE-EN 1998-1)

Tipo de suelo	$S$	$T_B$ [s]	$T_C$ [s]	$T_D$ [s]
A	1,0	0,15	0,4	2,0
B	1,2	0,15	0,5	2,0
C	1,15	0,20	0,6	2,0
D	1,35	0,20	0,8	2,0
E	1,4	0,15	0,5	2,0

Tabla 8 Valor de los parámetros recomendados que describen el espectro de respuesta elástico horizontal tipo 2 –sismo de campo cercano– (Tabla 3.3 de UNE-EN 1998-1)

Tipo de suelo	$S$	$T_B$ [s]	$T_C$ [s]	$T_D$ [s]
A	1,0	0,05	0,25	1,2
B	1,35	0,05	0,25	1,2
C	1,5	0,10	0,25	1,2
D	1,8	0,10	0,30	1,2
E	1,6	0,05	0,25	1,2

### 7.5.5 Elastic design spectra in ADRS-format (e.g. [Faj99]) (Acceleration-Displacement-Response Spectra)



# Comportamiento sísmico del puente :

- Comportamiento elástico → Sin daño → grandes fuerzas → Caro → (no requisitos)
- Ductilidad limitada → Ciertas plastificaciones y fisuración → Aislamientos → Aumento de T; Reducción espectro por q
- Comportamiento Dúctil → Con daño → rótulas plásticas → confinamiento y armado. → Diseño por capacidad zonas próximas

Factor de comportamiento  $q = F_{el}/F_s$  ; Ductilidad  $\mu = d_{max}/d_y$

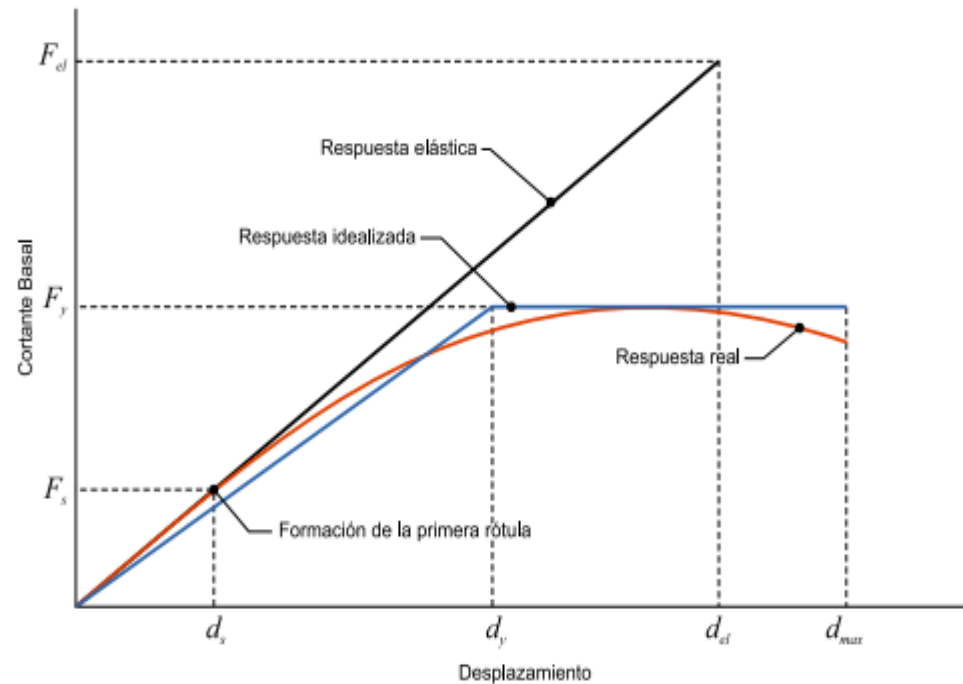


Figura 23 Respuesta estructural: elástica, real e idealizada

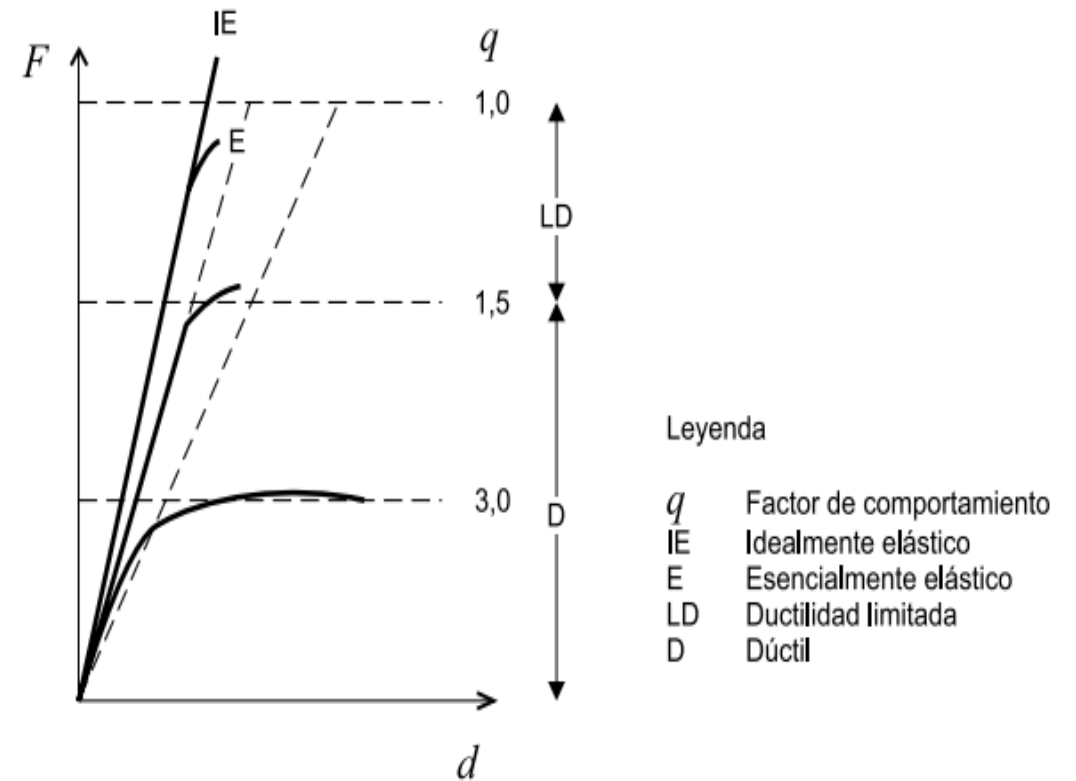


Figura 76 Comportamiento sísmico (Figura 2.1 de UNE-EN 1998-2)

## Factor de comportamiento q

### Puentes regulares ( $p < 2$ ) :

$q = 1.5$  ..... (ductilidad limitada)

$q = 3.5 \lambda(\alpha_s)$  ..... (dúctil)  $\alpha_s = L/h$

$\lambda(\alpha_s) = L/h$  si  $\alpha_s > 3$

$\lambda(\alpha_s) = (\alpha_s/3)^{0.5}$  si  $1 < \alpha_s < 3$

Influencia de axiles elevados ---- →

### Puentes irregulares ( $p > 2$ ) :

Reducción pila i :  $r_i = (M_e/M_r) i * q$

Todas las pilas :  $p = r_{\max} / r_{\min}$

Si  $p > 2$  reduce q ...  $q_r = 2/p * q > 1.5$

Optimo  $p = 1$  ...

para  $\eta_k \leq 0,3$   $q = q_0$

para  $0,3 < \eta_k \leq 0,6$   $q = q_0 - \left( \frac{\eta_k}{0,3} - 1 \right) (q_0 - 1)$

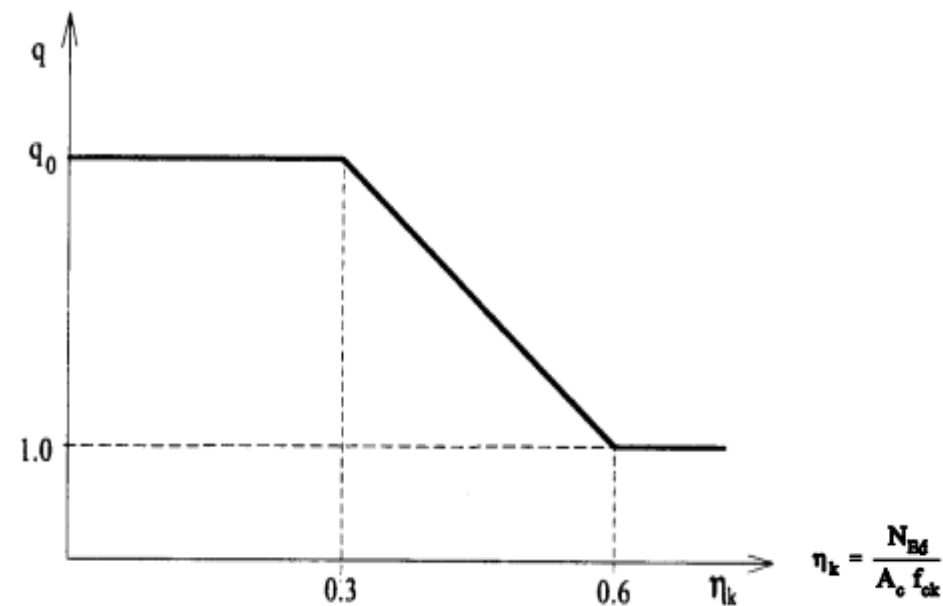


Fig. H.1 – Influencia de  $\eta_k$  en el valor de q

# RIGIDECES

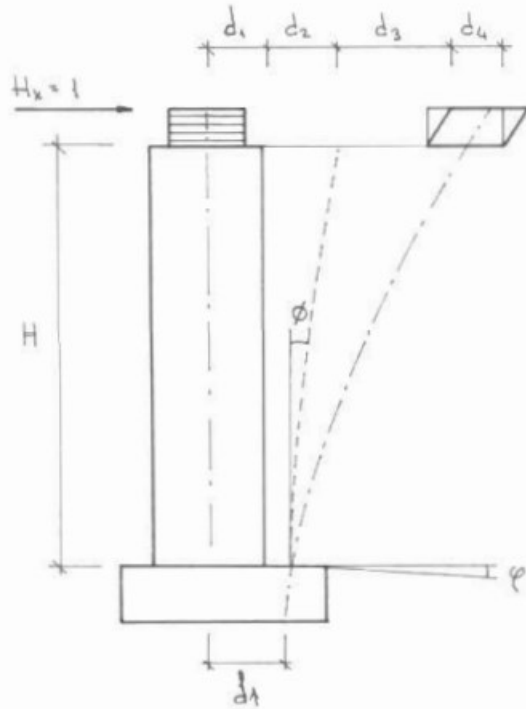
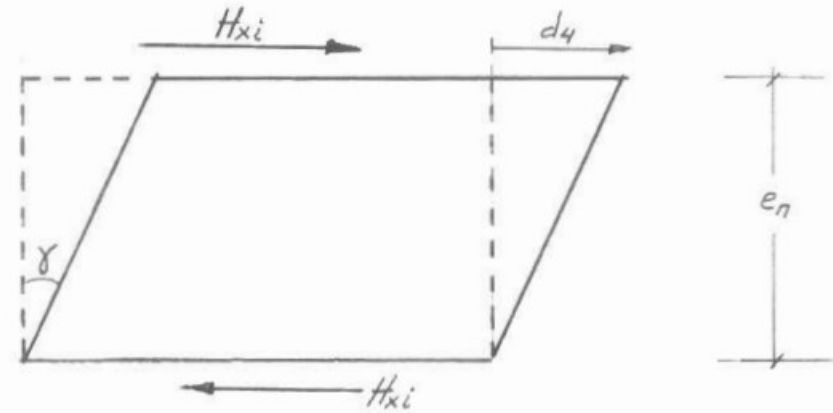


Figura 2. Deformación del conjunto cimiento+fuste+neopreno



$$\text{Distorsión: } \gamma = \frac{\tau}{G_r} = \frac{H_{xi}}{A_n \cdot G_r} \quad ;; \quad \text{deslizamiento } d_4 = e_n \tan \gamma \approx e_n \cdot \gamma$$

Figura 4. Deformación del neopreno

$d_4 = F_{xi} \cdot e_n / (G_r \cdot A_n) \rightarrow F_{xi} = K_n \cdot d_4 \rightarrow K_n = G_r \cdot A_n / e_n$  rigidez por neopreno

$d_3 = F_{xi} \cdot H^3 / 3EI \rightarrow F_{xi} = K_p \cdot d_3 \rightarrow K_p = 3EI / H^3$  rigidez por pila

Si la pila está biempotrada  $K_p = 12 EI / H^3$

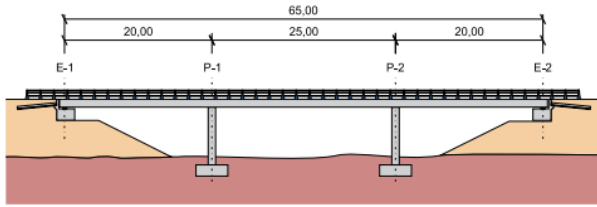


Figura 20 Alzado del puente considerado

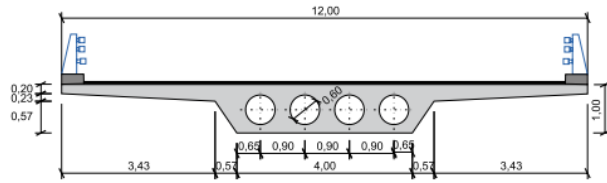


Figura 21 Sección transversal del puente considerado

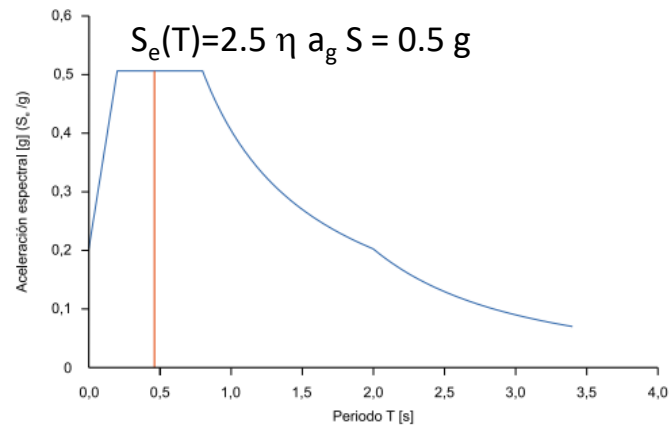


Figura 24 Determinación de la aceleración máxima del sistema (normalizada respecto a g) de 1gdl a partir del espectro de respuesta y el periodo propio longitudinal

$$K_{global} = K_{estribos} + K_{pilas} = 2 \cdot K_{neop\_estribo} + 2 \cdot 12 \frac{EI_{pila}}{H_{pila}^3} = 2 \times 1080 \times 0.4 \times 0.5 / 0.066 + \dots =$$

$$2 \cdot 6545 + 2 \cdot 12 \frac{32,84 \cdot 10^6 \frac{\pi \cdot 1.2^4}{64}}{7^3} = 13090 + 242154 = \underline{246982 \text{ kN/m}}$$

$$T_{estructura} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{K}} = 2\pi \sqrt{\frac{1299 + 0,50 \cdot 40}{246982}} = 0,46 \text{ s}$$

$$a_g S = 0,15 g \cdot 1,35 = 0,20 g$$

$$S_e(T) = 2.5 S \eta a_g = 0.5 g$$

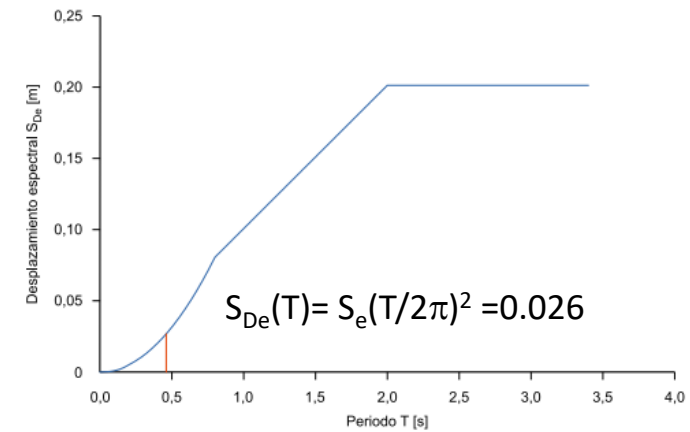


Figura 25 Espectro de desplazamientos y desplazamiento espectral esperado con un comportamiento lineal



### 7.5.5 Elastic design spectra in ADRS-format (e.g. [Faj99]) (Acceleration-Displacement-Response Spectra)

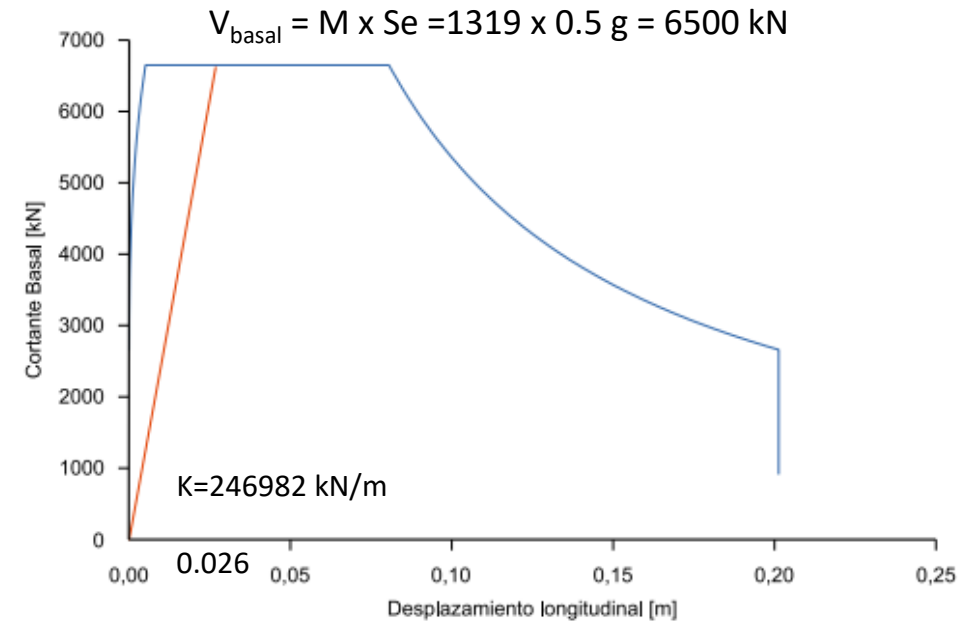
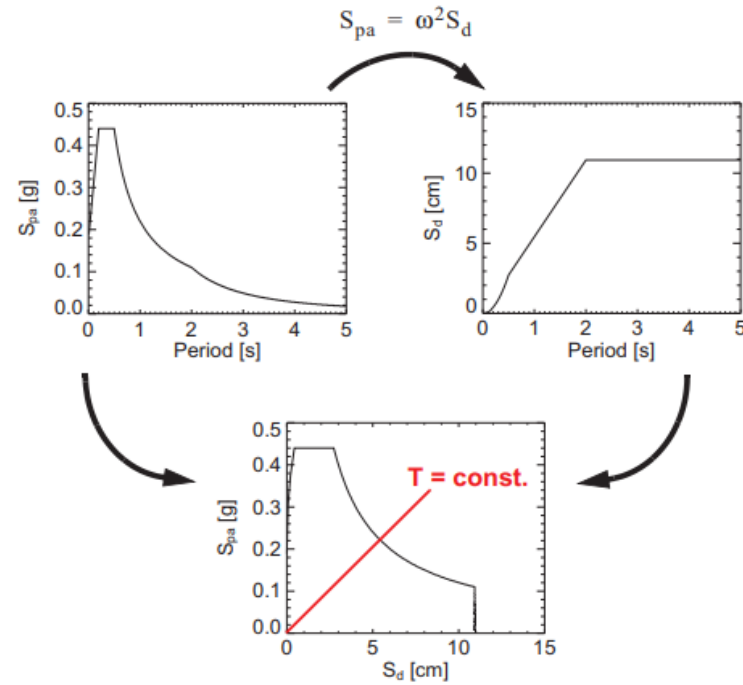


Figura 26 Cortante basal frente a desplazamiento. Comportamiento esencialmente elástico

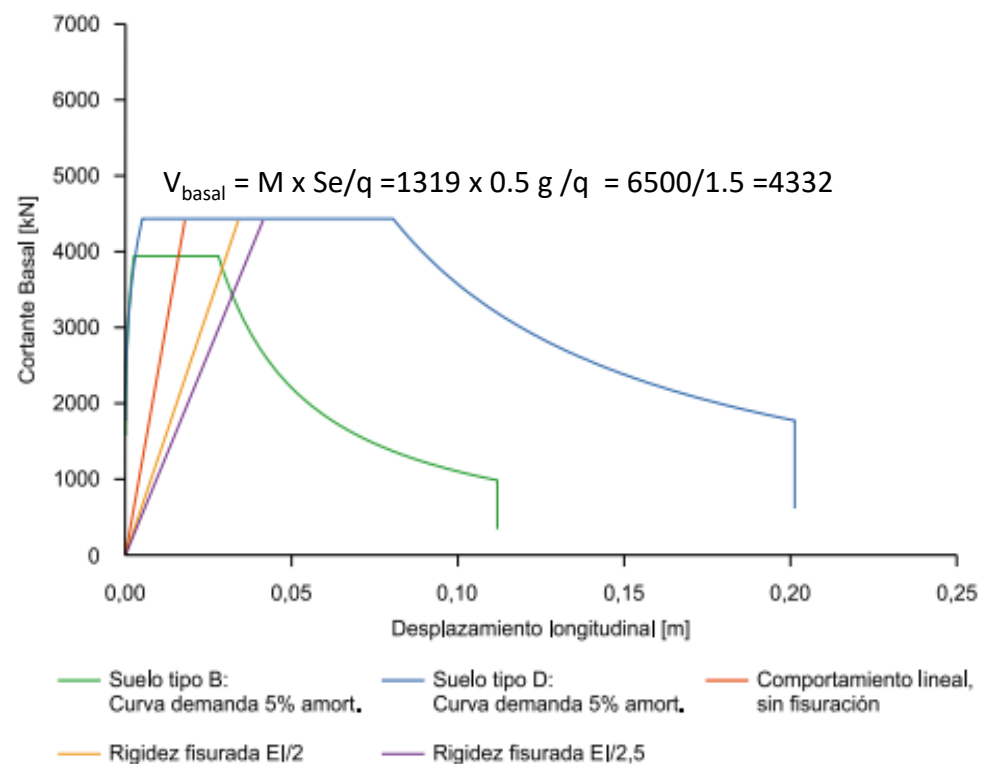


Figura 27 Cortante basal frente a desplazamiento. Proyecto con ductilidad limitada

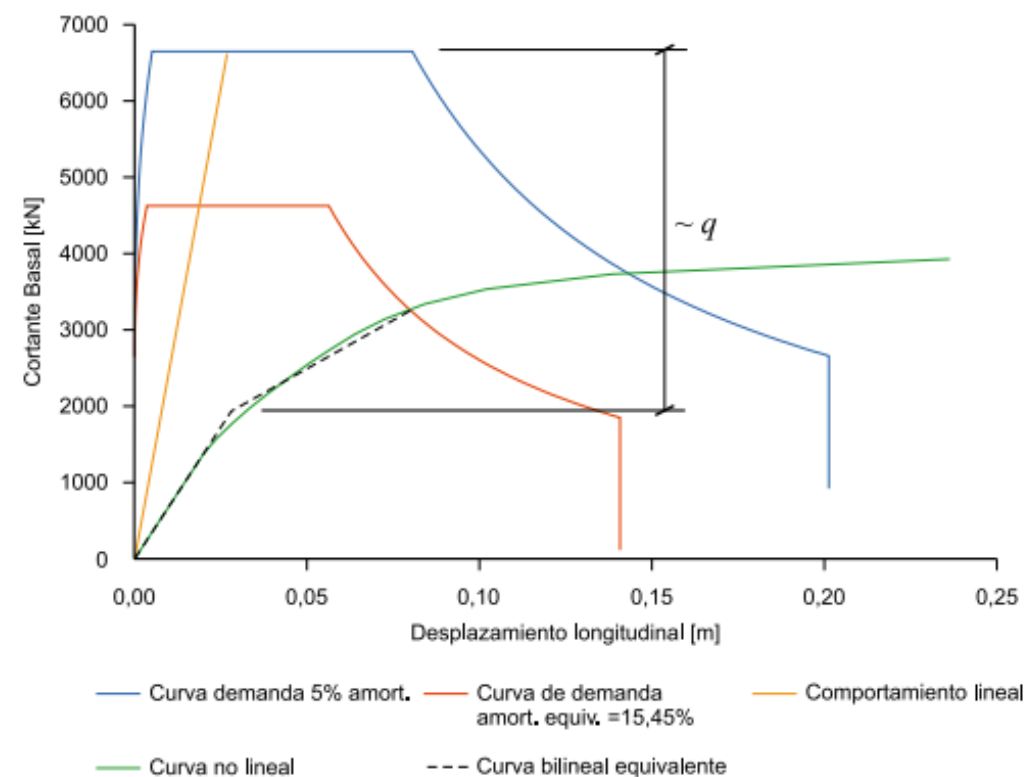


Figura 29 Cortante basal frente a desplazamiento Proyecto con ductilidad.  
Determinación del punto de funcionamiento

# Curvas de Demanda y de Capacidad. Punto de funcionamiento

## Método Modal Espectral (Lineal)

Curva de Demanda elástica y reducida

Ductilidad  $q$  como dato a justificar

Versus

## Cálculo estático No Lineal ó del Empuje Incremental (Pushover)

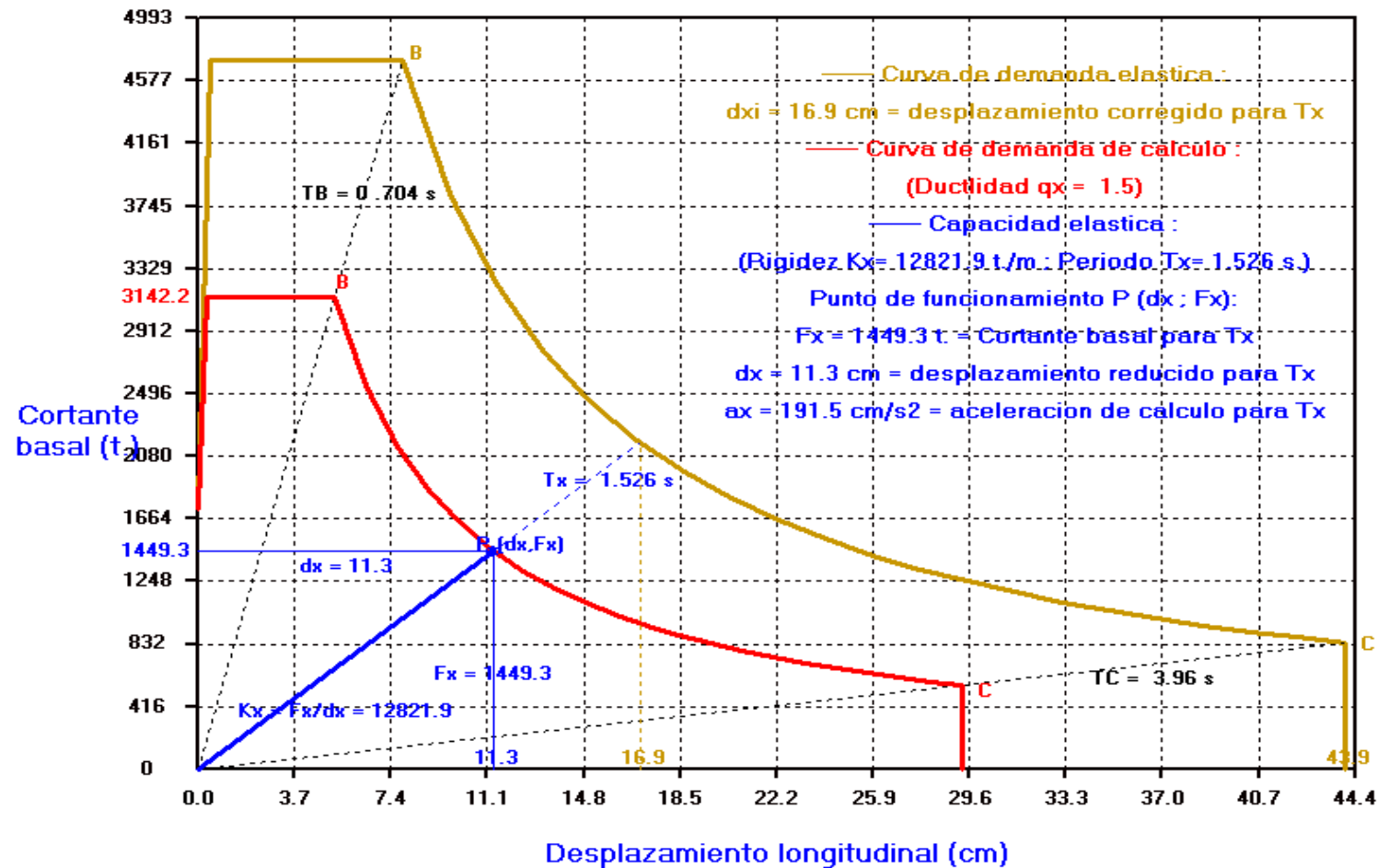
Curva de Demanda elástica y reducida

Energía elástica e histerética

Amortiguamiento  $\xi$  equivalente. Coef.de reducción  $\eta$

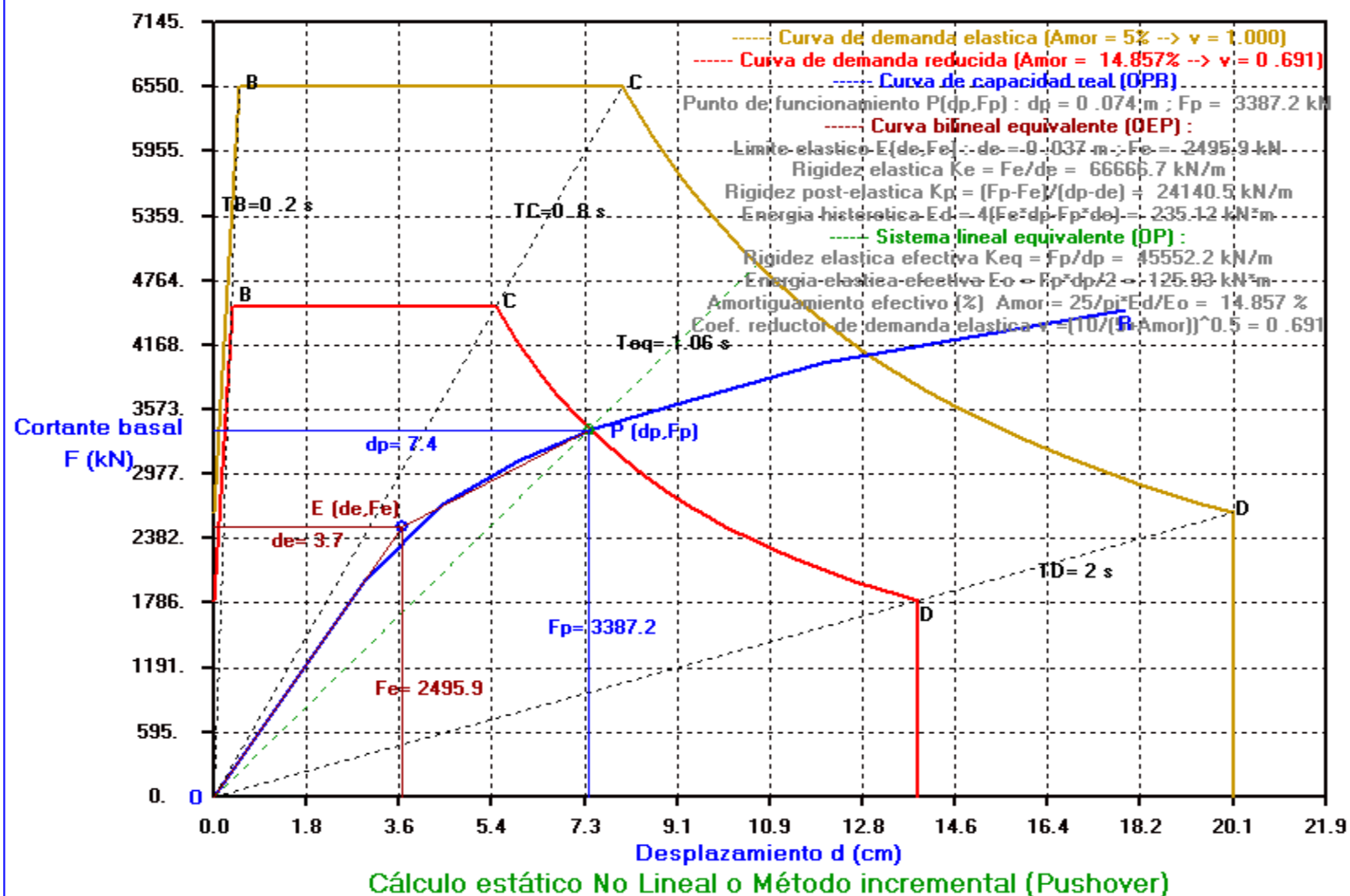
Proceso iterativo (ATC-40)

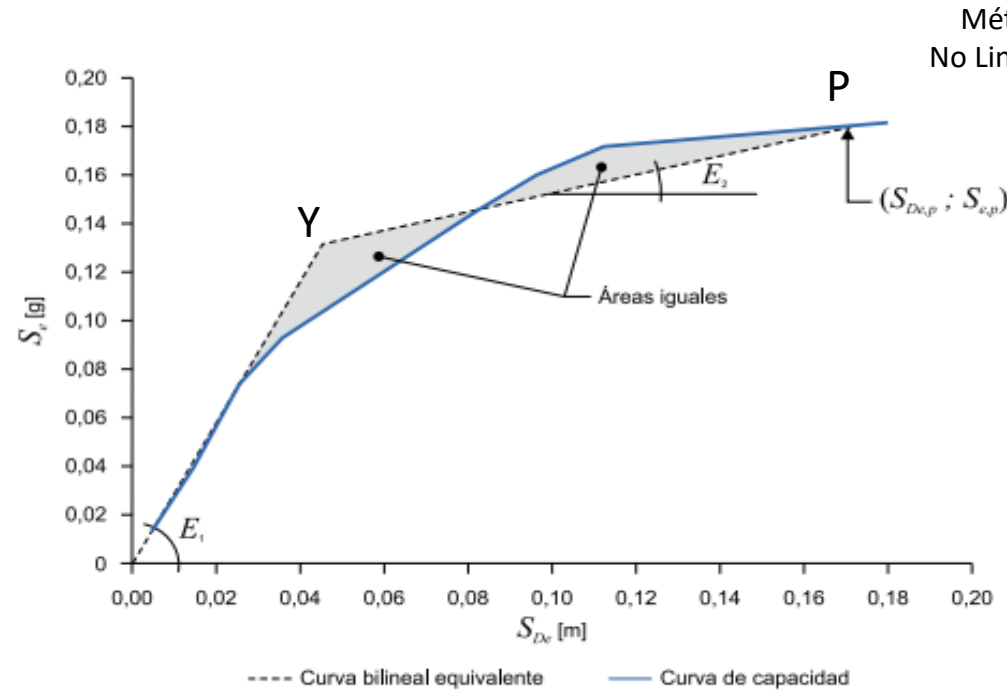
**CORTANTE BASAL FRENTE A DESPLAZAMIENTO. NCSP-07**  
**Curvas de demanda y de capacidad en sismo longitudinal**



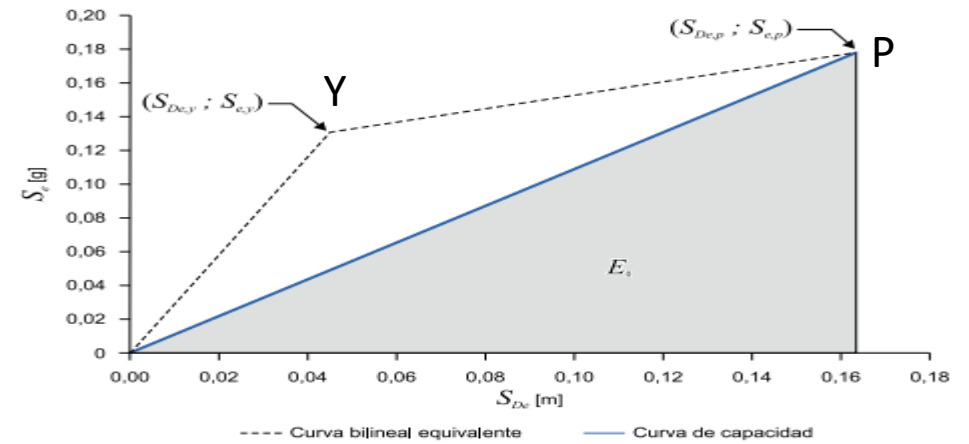
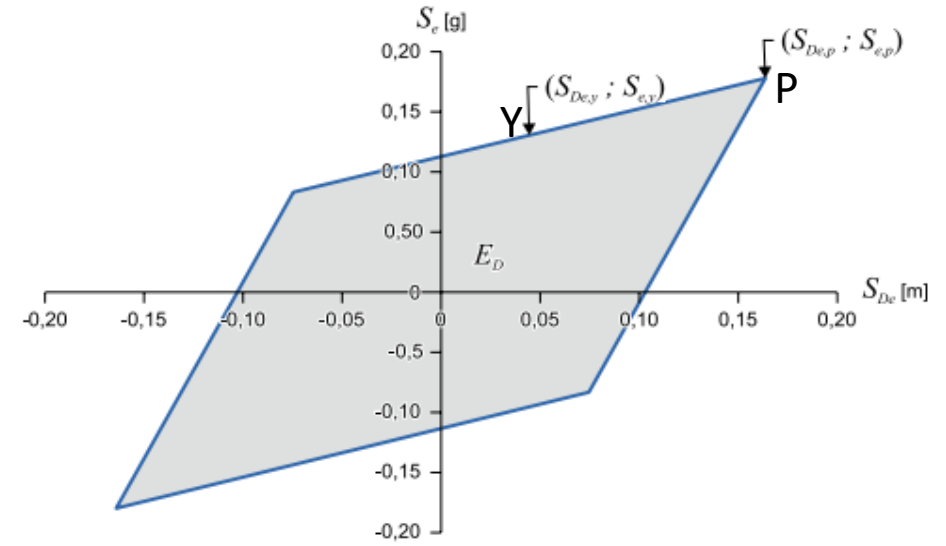
(Método espectral) (Lineal)

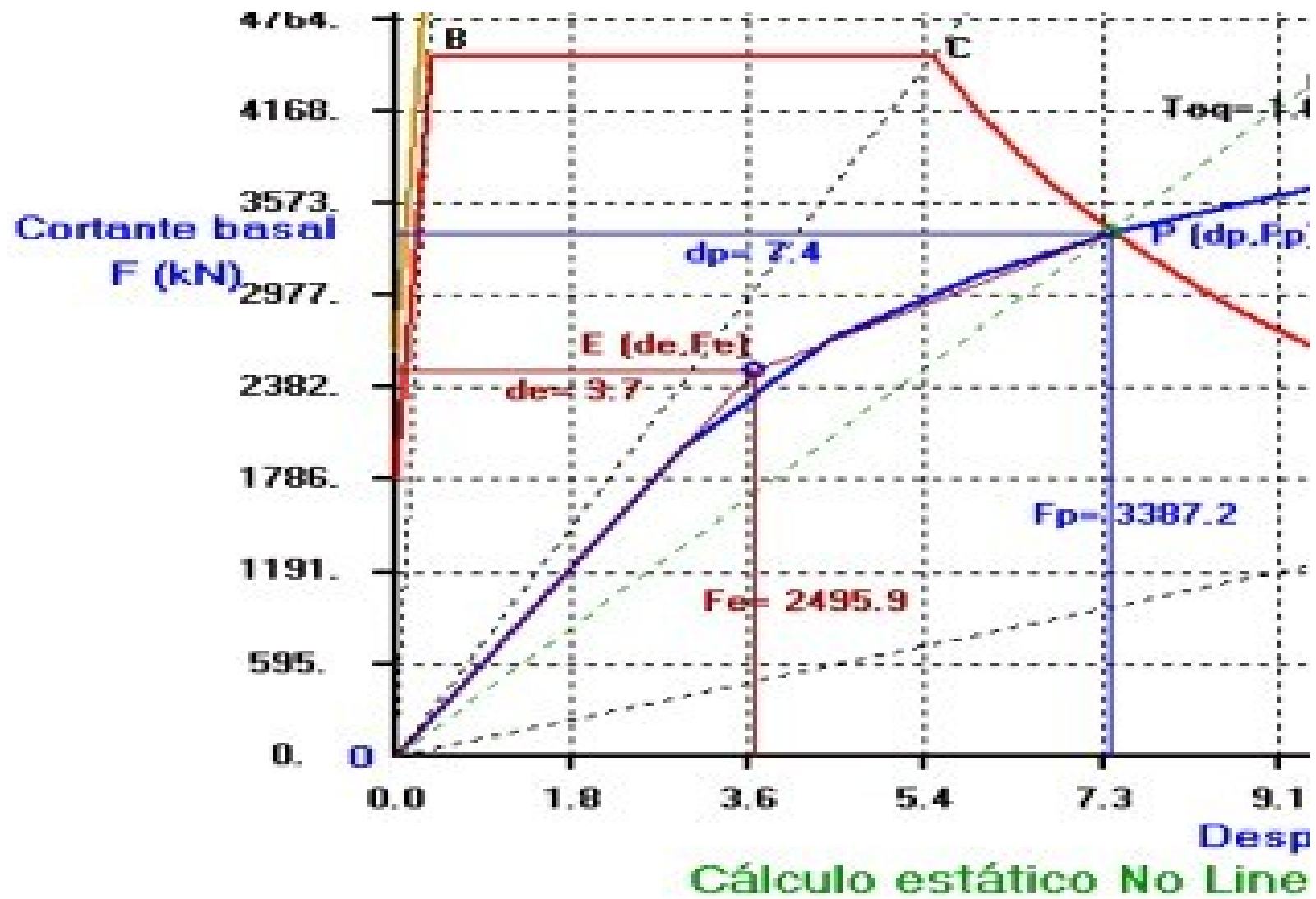
**CORTANTE BASAL FRENTE A DESPLAZAMIENTO.**  
Curvas de demanda y de capacidad. Punto de funcionamiento P





$$\xi = \frac{1}{4\pi} \frac{E_D}{E_0} = \frac{1}{4\pi} \frac{4(S_{e,y}S_{De,p} - S_{e,p}S_{De,y})}{\frac{1}{2}S_{e,p}S_{De,p}} \quad \eta = \sqrt{\frac{10}{5 + \xi[\%]}}$$





# Aislamiento sísmico de puentes : Aislamiento y disipación.

- Apoyos elastoméricos → Disminuye K lateral → alargan Periodo  $T=2\pi \sqrt{M/K}$  → disminuyen fuerzas ; ojo dmax y rigidez vertical. Mantenimiento.
- Disipadores de energía → Amortiguadores → No modifican M y K → No varía T dmax menores → Disipan energía ; Comportamiento muy no lineal.
- Otros dispositivos apoyos de fricción, topes transversales, barras verticales de anclaje.

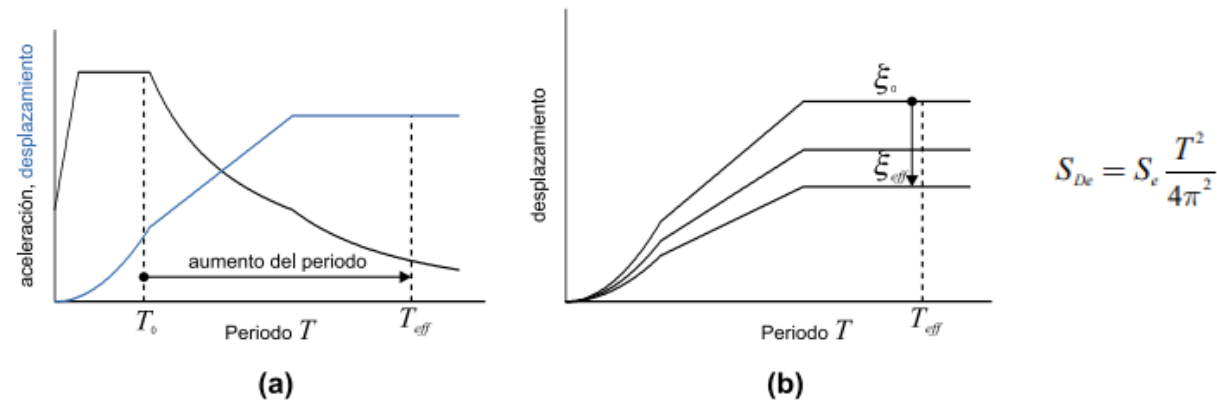
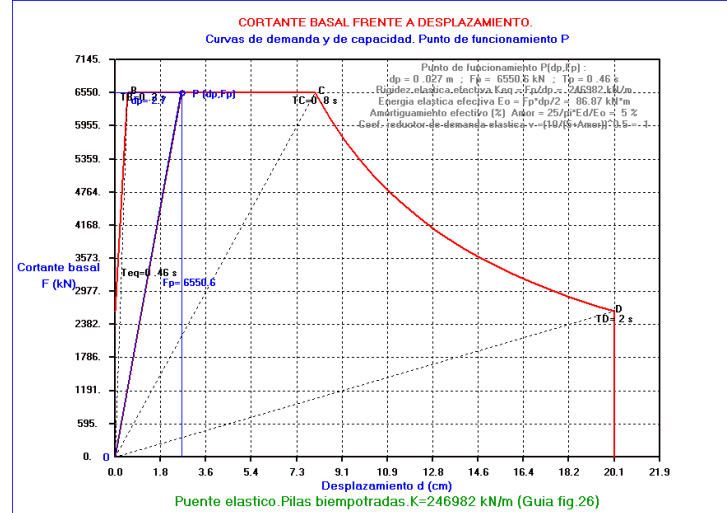


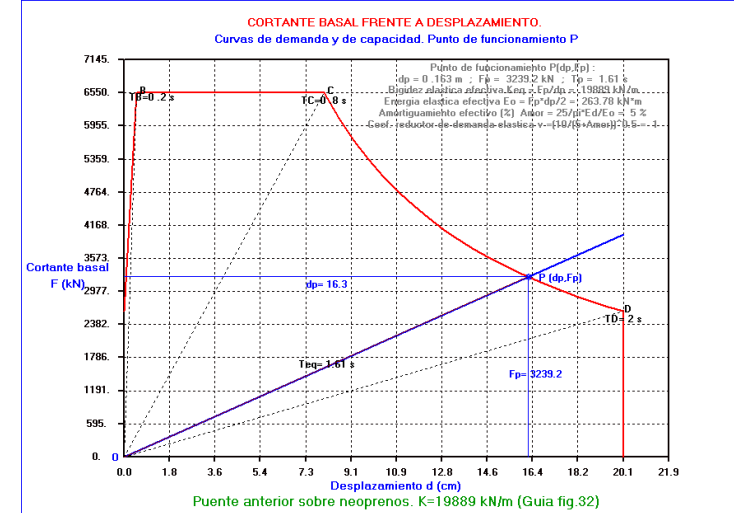
Figura 89 Medios para alcanzar el aislamiento sísmico: (a) aumento del periodo propio de la estructura y (b) aumento de la capacidad de disipación de energía (adaptado a partir de la referencia [30])



## Sin aislamiento (Pila biempotrada)



## Aislamiento sobre neoprenos



## Apoyos elastoméricos de alto amortiguamiento HDRB

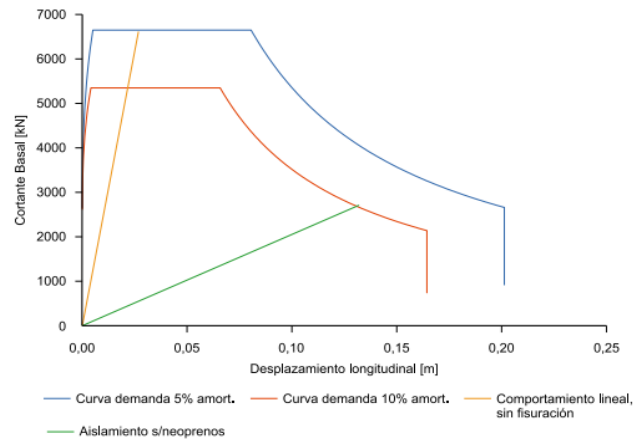
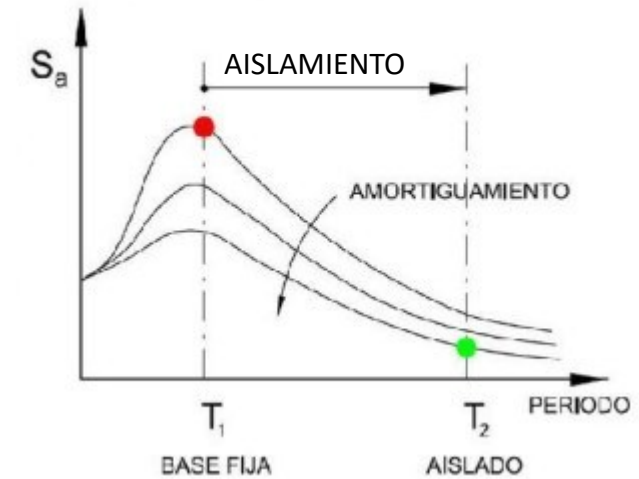


Figura 33 Cortante basal frente a desplazamiento. Estructura sobre apoyos elastoméricos de alto amortiguamiento (HDRB)



## Aislador con elastómero con núcleo de plomo (LRB) (Bilineal)

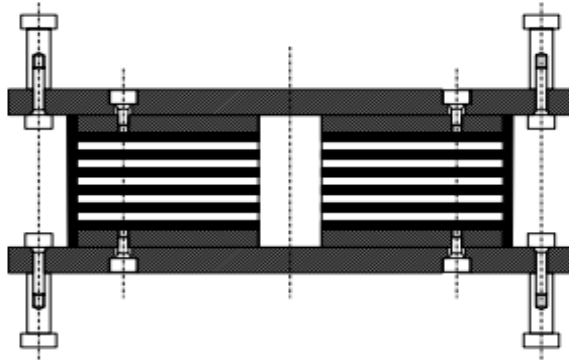


Figura 34 Aislador de elastómero zunchado con núcleo de plomo (LRB)

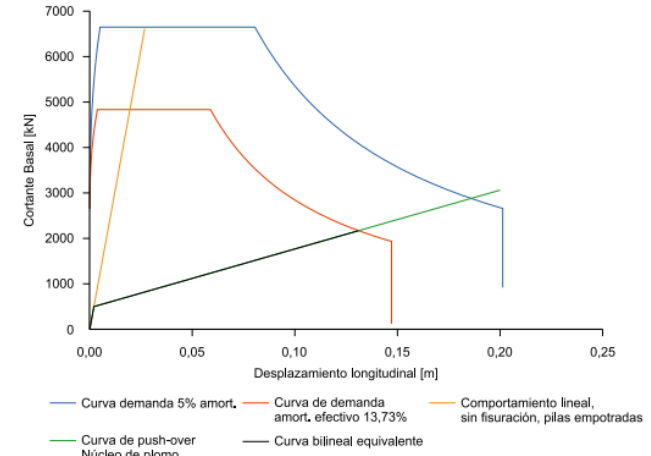


Figura 35 Cortante basal frente a desplazamiento. Puente sobre apoyos elastoméricos con núcleo de plomo (LRB)

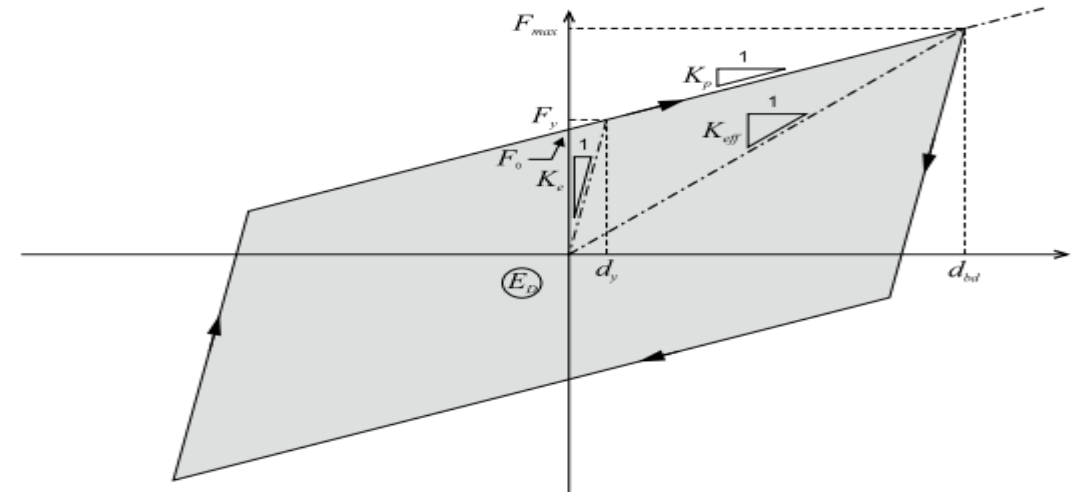
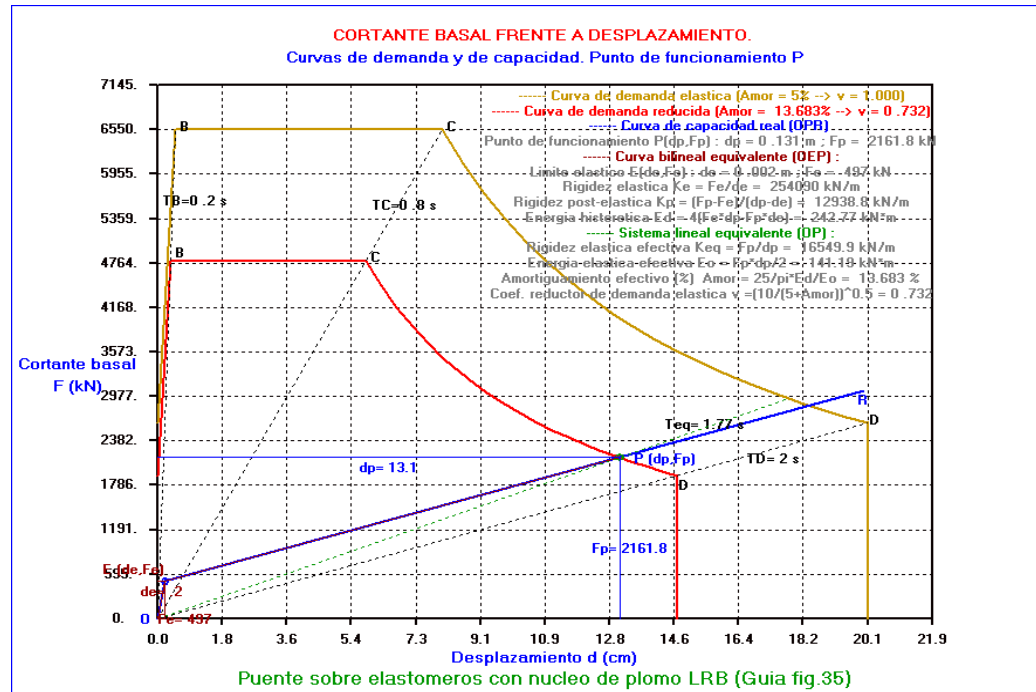


Figura 91 Aproximación del comportamiento histerético fuerza-desplazamiento (Figura 7.1 de UNE-EN 1998-2)

## Aisladores por rozamiento planos y curvas

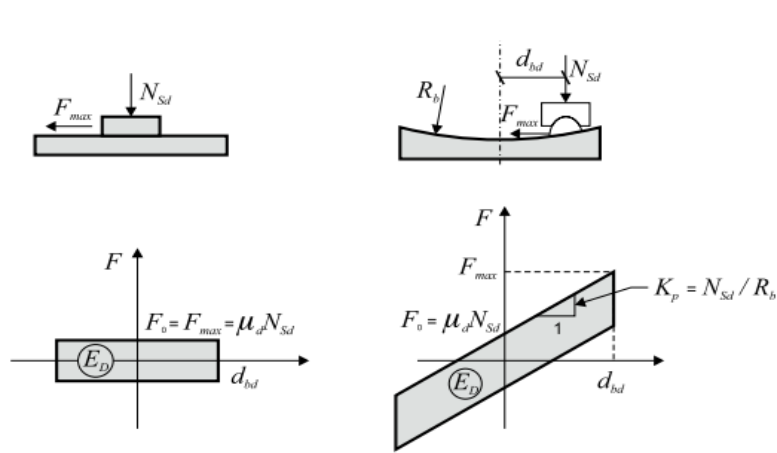


Figura 93 Comportamiento de rozamiento expresado mediante la relación fuerza-desplazamiento (Figura 7.3 de UNE-EN 1998-2)

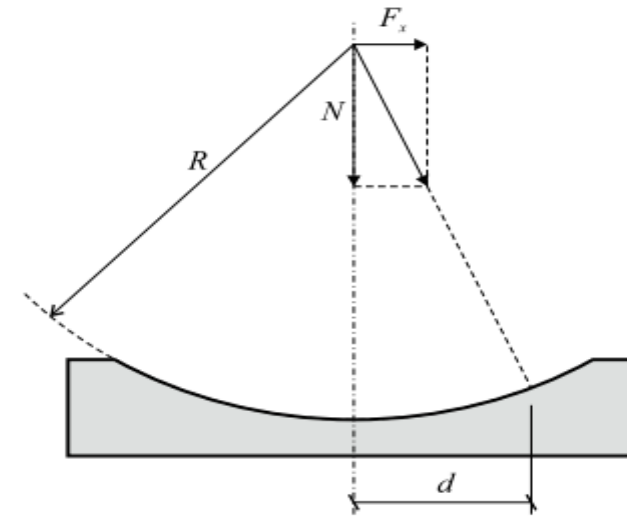


Figura 36 Aislador por rozamiento de superficie curva

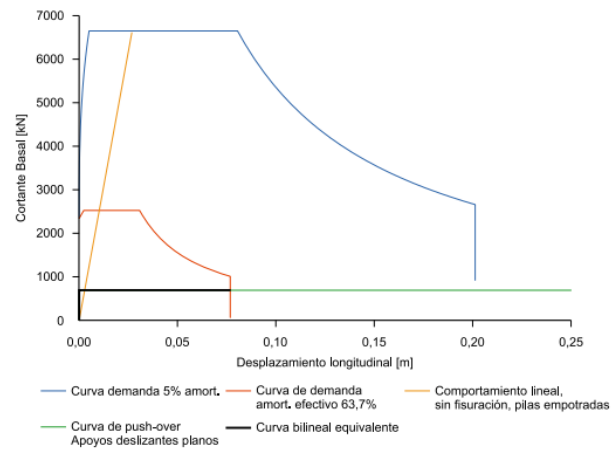


Figura 37 Cortante basal frente a desplazamiento. Puente sobre aparatos deslizantes planos

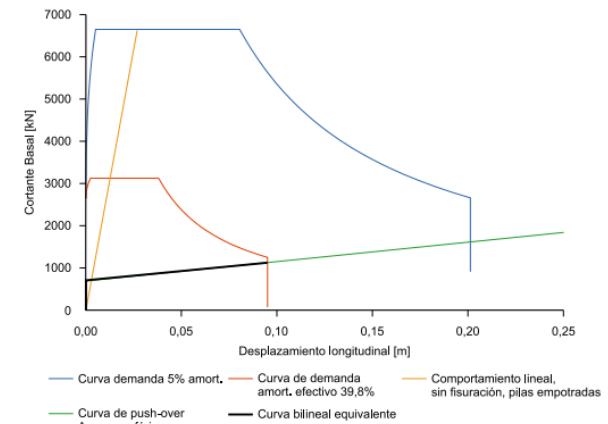


Figura 38 Cortante basal frente a desplazamiento. Puente sobre aparatos deslizantes de superficie curva

## Amortiguadores viscosos $F = C \cdot v^{\alpha_b}$



Figura 39 Ejemplos de amortiguadores viscosos dispuestos en puentes tanto en dirección longitudinal como transversal

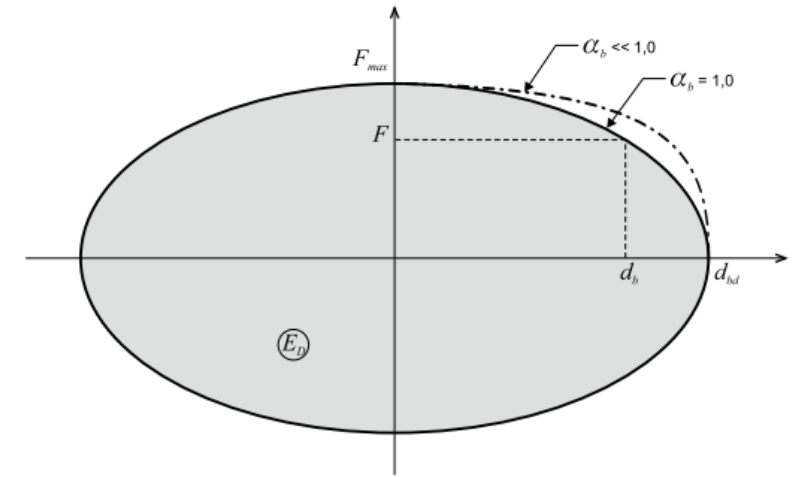
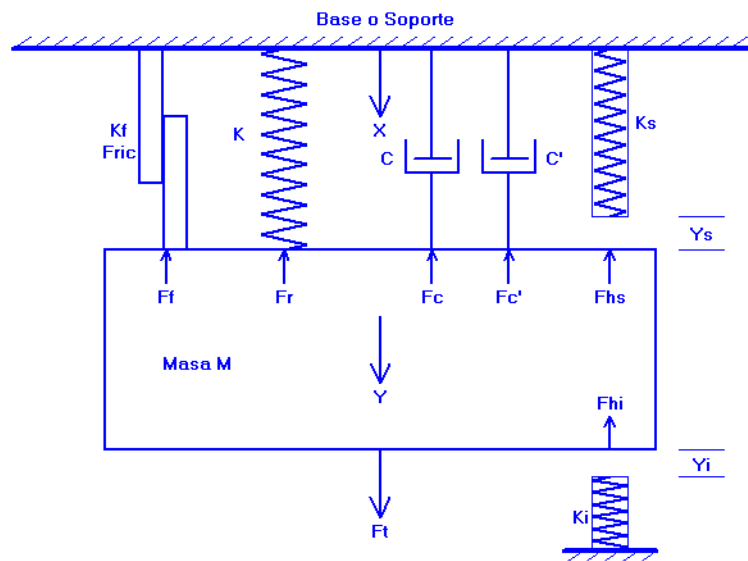


Figura 92 Ley de comportamiento viscoso fuerza-desplazamiento (Figura 7.2 de UNE-EN 1998-2)

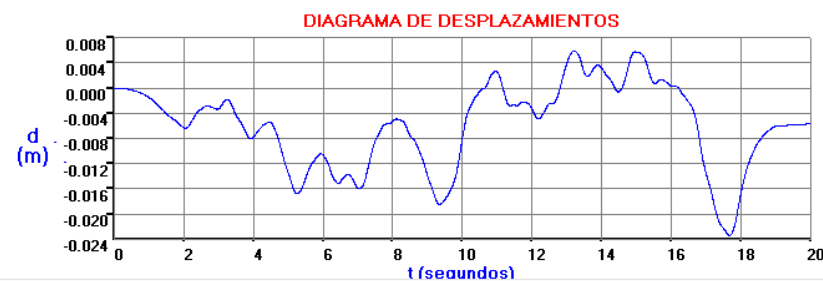
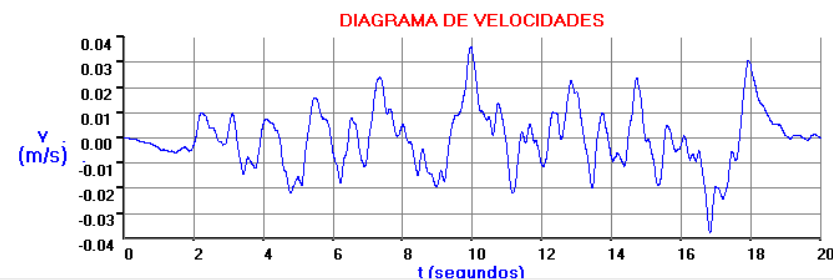
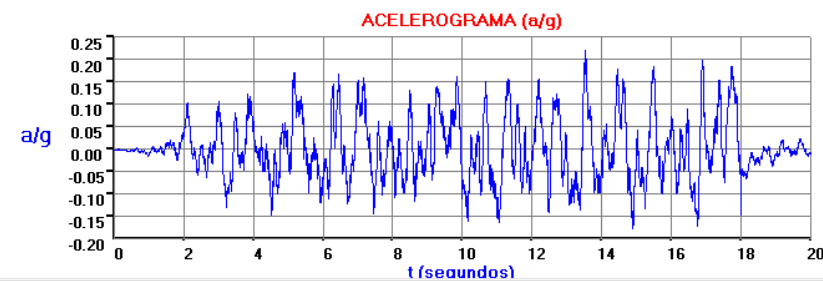
$$F = C v^{\alpha_b}$$

Ec.de equilibrio +F en diferencias finitas.  
Integración No Lineal de acelerograma.  
Acelerogramas compatibles .....

# MODELO DINAMICO = MASA + RESORTE + PISTON + FVD + TOPES + FRICCION



$M = 1.2990 \times 10^3 \text{ (kg)}$      $K = 1.9890 \times 10^4 \text{ (kN/m)}$      $K_2 = 0.0000 \times 10^0 \text{ (kN/m)}$      $K_2 = 0.0000 \times 10^0 \text{ (kN/m)}$   
 $C = 5.0830 \times 10^2 \text{ (kN*s/m)}$      $C' = 5.0000 \times 10^2 \text{ (kN*s/m)}$      $\alpha_B = 2.0000 \times 10^{-1}$   
 $K_s = 0.0000 \times 10^0 \text{ (kN/m)}$      $Y_s = 0.0000 \times 10^0 \text{ (m)}$      $K_i = 0.0000 \times 10^0 \text{ (kN/m)}$      $Y_i = 0.0000 \times 10^0 \text{ (m)}$   
 $K_f = 0.0000 \times 10^0 \text{ (kN/m)}$      $F_{ric} = 0.0000 \times 10^0 \text{ (kN)}$



Salir

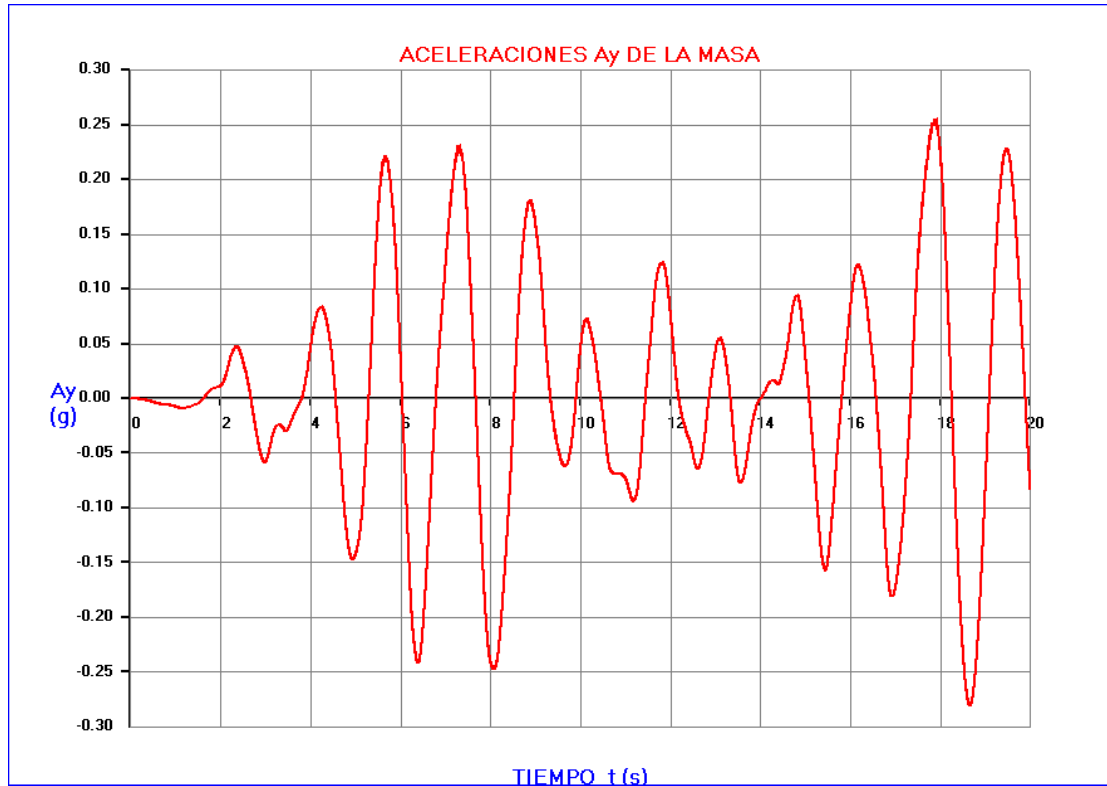
t (s)	a/g
0.93	-0.0072
0.94	-0.0083
0.94	-0.0109
0.94	-0.0109
0.95	-0.0122
0.95	-0.0127
0.96	-0.0148
0.96	-0.0153
0.97	-0.0136
0.97	-0.0156
0.98	-0.0161
0.98	-0.0151

Otro gráfico

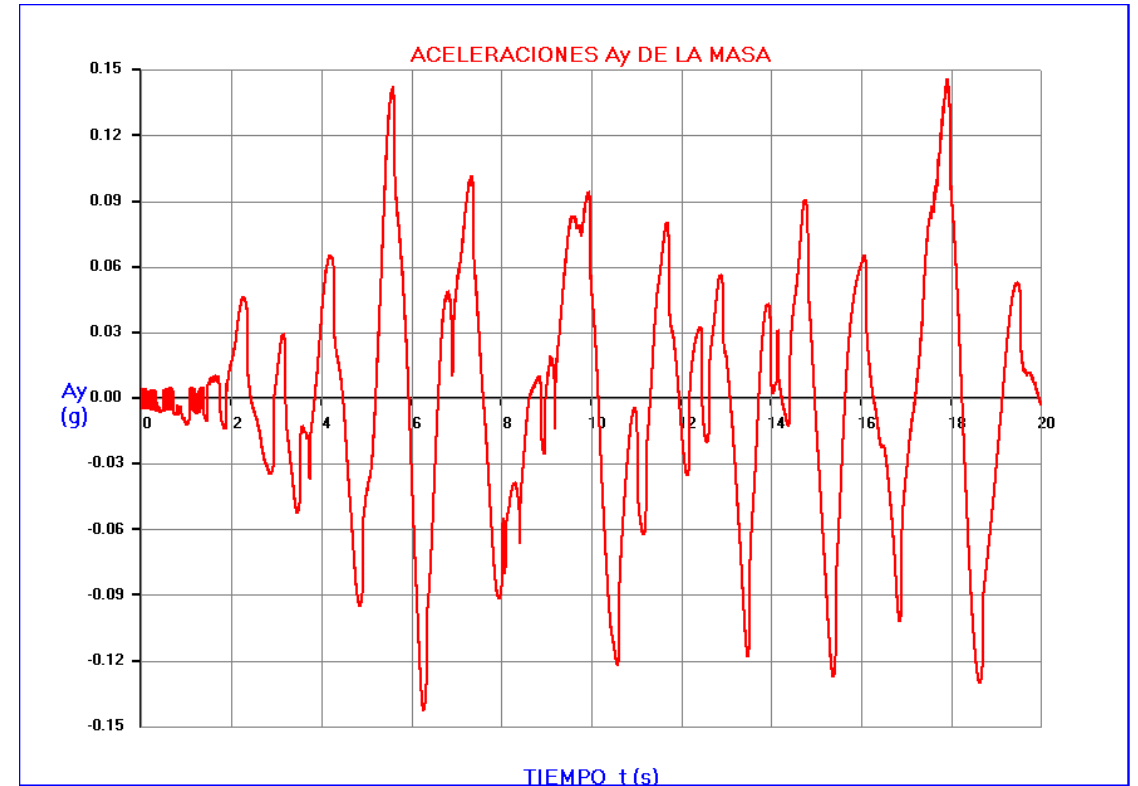
t (s)	v (m/s)
0.71	-0.0019
0.71	-0.0019
0.72	-0.0020
0.72	-0.0020
0.73	-0.0021
0.74	-0.0021
0.75	-0.0021
0.75	-0.0022
0.75	-0.0022
0.76	-0.0023
0.76	-0.0023

Copiar

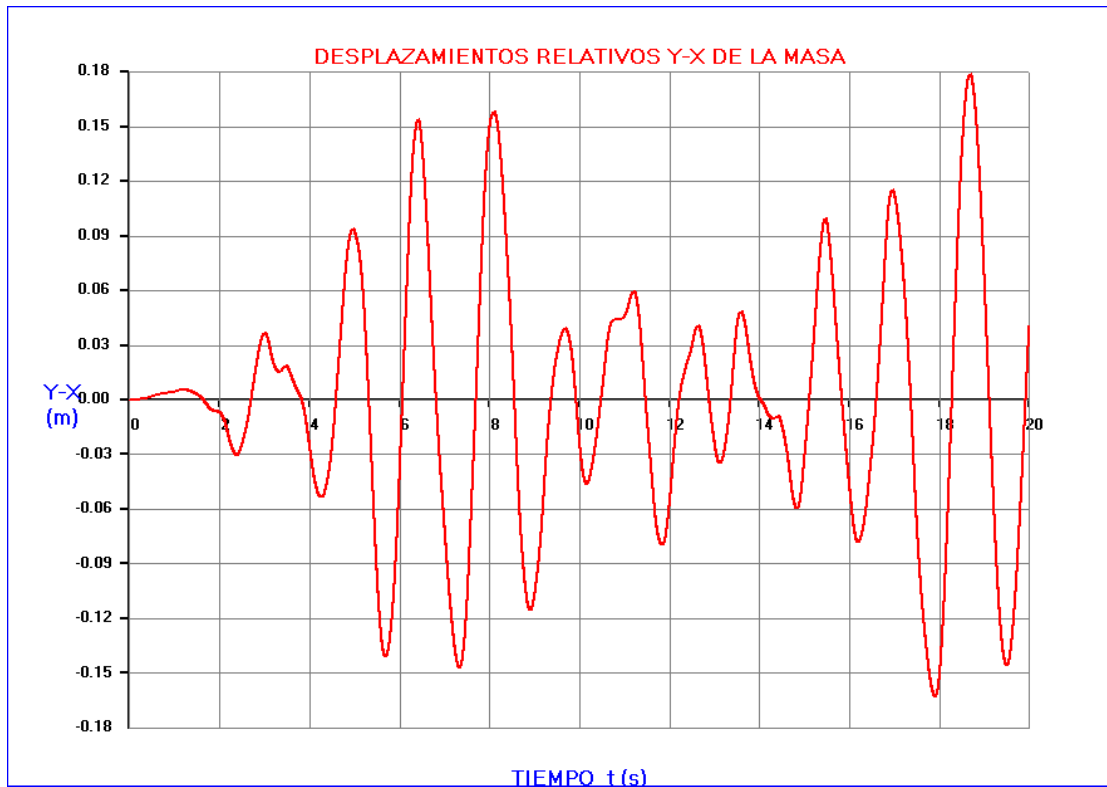
t (s)	d (m)
1.42	-0.0036
1.43	-0.0036
1.43	-0.0037
1.44	-0.0037
1.44	-0.0037
1.45	-0.0037
1.45	-0.0038
1.46	-0.0038
1.46	-0.0038
1.47	-0.0039
1.48	-0.0039
1.48	-0.0039



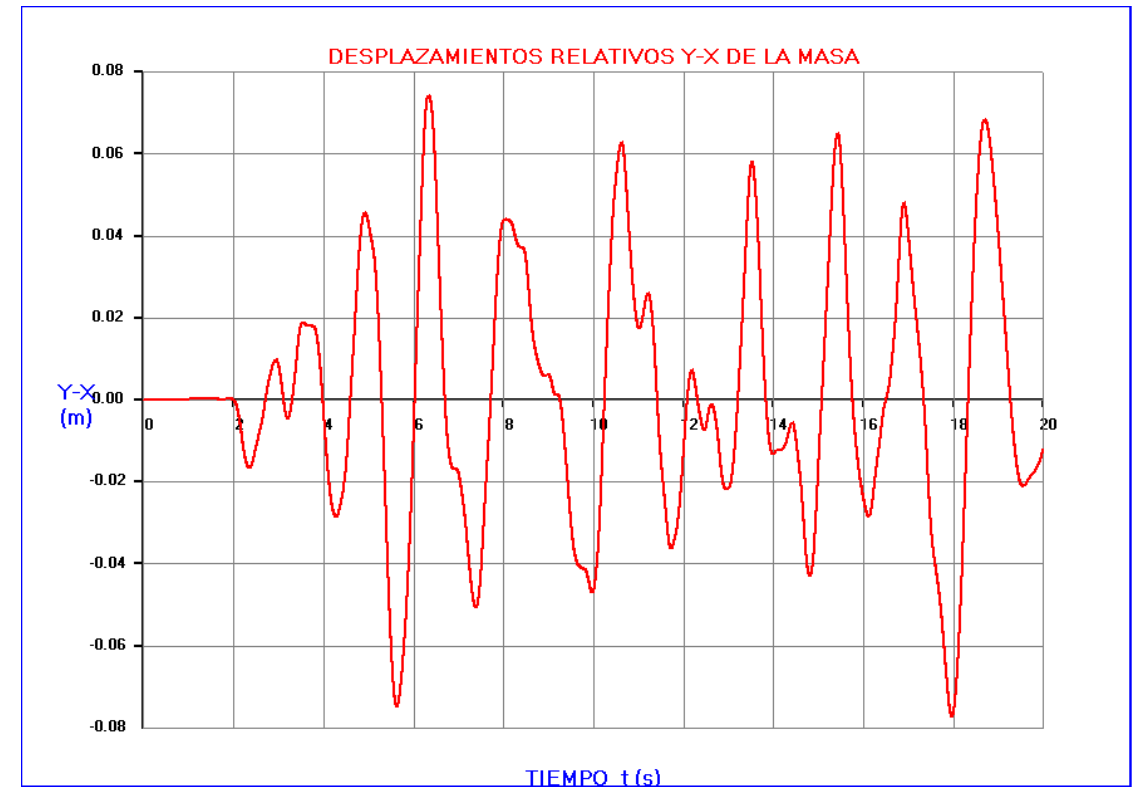
Puente aislado sobre neoprenos  
 $A_y \text{ max} = 0.28g$



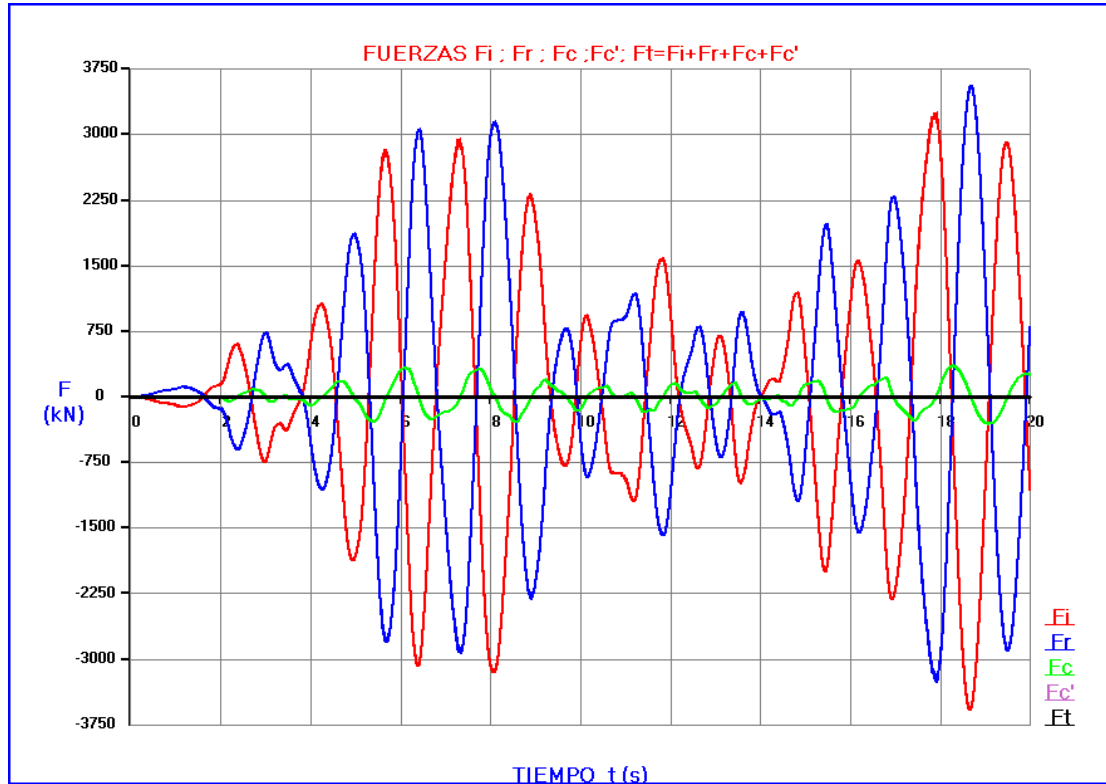
Puente sobre neoprenos + Amortiguador FVD  
 $A_y \text{ max} = 0.14g$



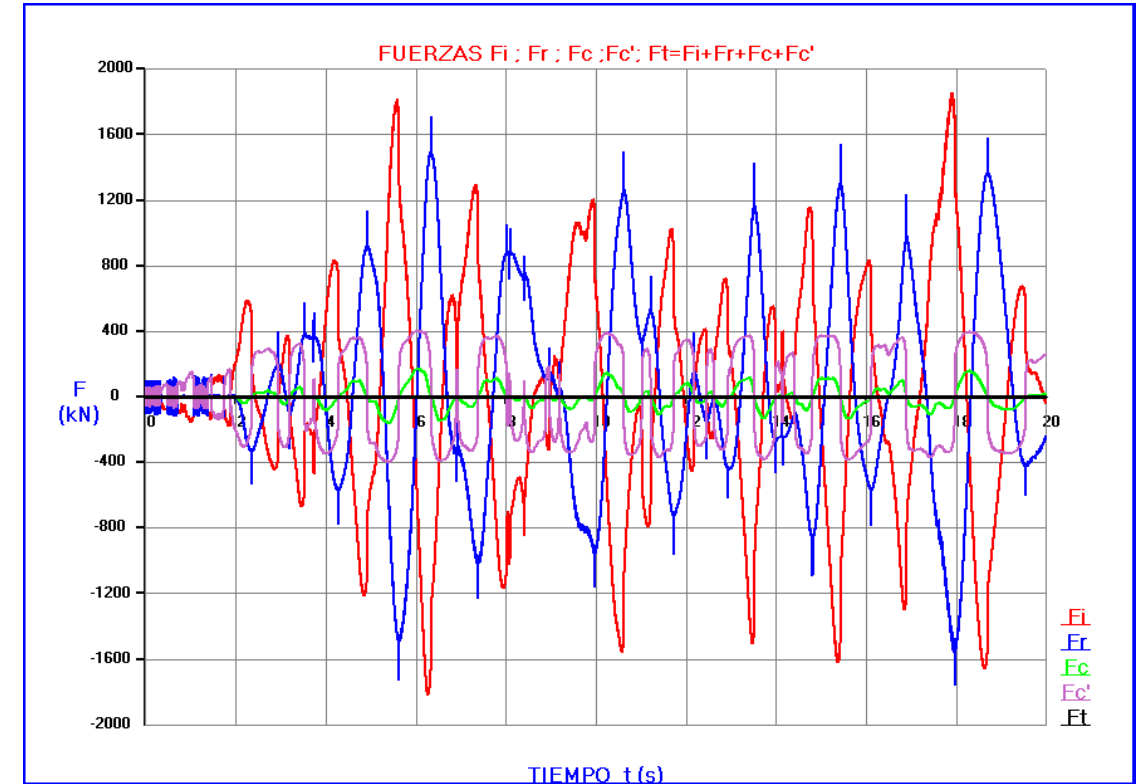
Puente aislado sobre neoprenos  
 $(Y-X)_{\max} = 0.18\text{m}$



Puente sobre neoprenos + Amortiguador FVD  
 $(Y-X)_{\max} = 0.074\text{m}$



Puente aislado sobre neoprenos  
 $F_r \text{ max} = 3700 \text{ kN}$



Puente sobre neoprenos + Amortiguador FVD  
 $F_r \text{ max} = 1400 \text{ kN}$



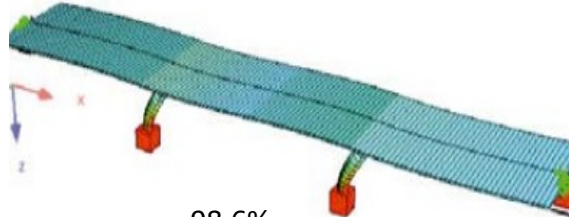
## **Métodos de Cálculo :**

### Métodos Lineales :

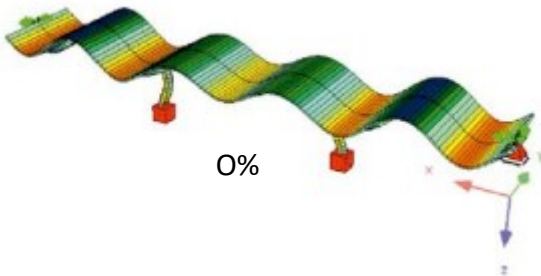
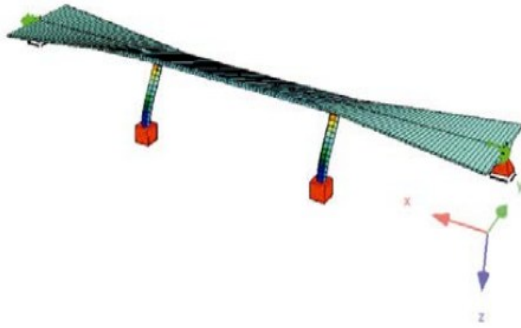
- \* Cálculo modal espectral
- \* Método del Modo Fundamental

### Métodos No Lineales :

- \* Método dinámico No Lineal
- \* Método estático No Lineal



98,6%



0%

## Métodos Lineales :

### \* Cálculo modal espectral:

Método de referencia para cualquier comportamiento adoptado.

Utiliza la técnica de descomposición modal (Lineal)

Cálculo elástico de respuestas máximas en modos significativos.

Utiliza espectros de respuesta elásticos y realiza combinación posterior.

Para comportamiento dúctil o de ductilidad limitada ( $q > 1$ ) utiliza espectros reducidos o de cálculo  $S_{ar}(T) = S_a(T)/q$

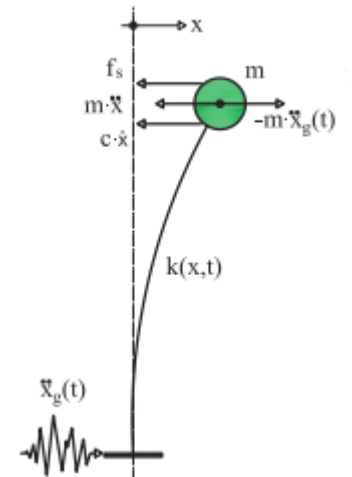
Factor de comportamiento  $q$  . Regularidad  $p$

### \* Método del Modo Fundamental:

Equivalente al modal pero simplificado a 1gdl .

Análisis espectral independiente en sentido longitudinal y transversal.

Modelo de Tablero Rígido y Flexible y Pila aislada.



## Métodos No Lineales :

### \* Método dinámico no lineal:

Integración numérica de acelerogramas de ecuaciones de equilibrio dinámico (Ejemplo. en siguiente diapositiva)  
Para profundizar en el comportamiento postelástico.  
Comprobar ductilidades supuestas.  
Analizar dispositivos no lineales (Amortiguadores FVD etc).  
Siempre después de análisis modal linealizado.

### \* Método estático no lineal :

.

Técnica Pushover : Cargas gravitatorias fijas + horizontales crecientes hasta inestabilidad o colapso .  
Genera modelos bilineales y elásticos equivalentes

## Ejemplo del Método dinámico No Lineal

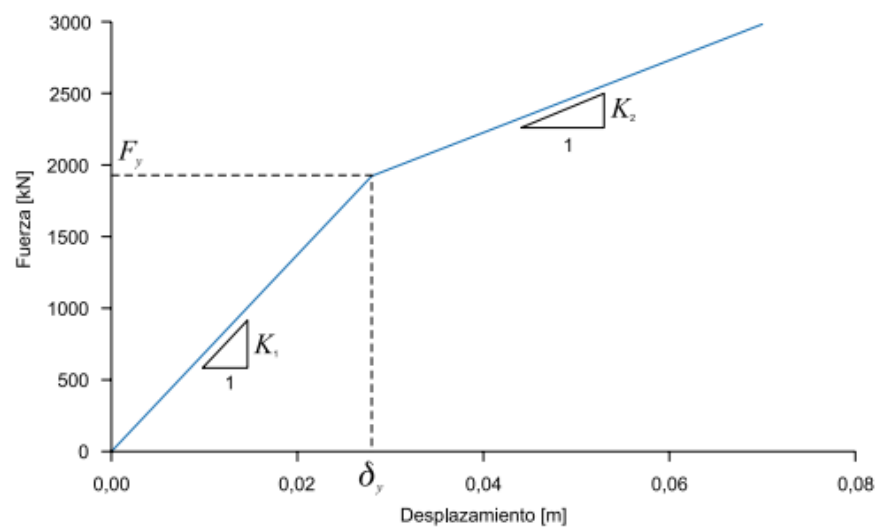
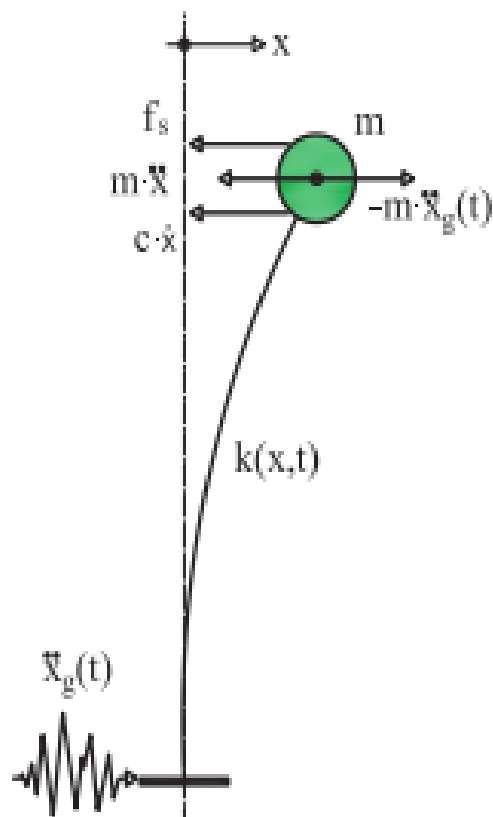


Figura 55 Relación fuerza-desplazamiento no lineal de tipo bilineal

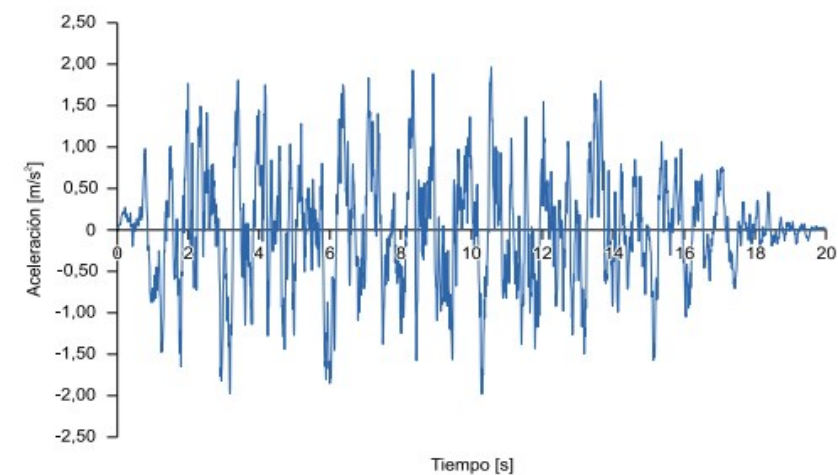


Figura 57 Acelerograma artificial compatible con el espectro para cálculo no lineal en el tiempo

## Integración por diferencias finitas :

### Modelo Lineal :

$$(\ddot{x} - \ddot{x}_i) + \frac{c}{M}(\dot{x} - \dot{x}_i) + \omega^2(x - x_i) = -\ddot{x}_i \rightarrow$$

$$\ddot{x}_r + \frac{c}{M}\dot{x}_r + \omega^2 x_r = -\ddot{x}_i$$

$$\dot{x}_{r,i} = \frac{x_{r,i-1} - x_{r,i-2}}{\Delta t} \quad \ddot{x}_{r,i} = \frac{\dot{x}_{r,i} - \dot{x}_{r,i-1}}{\Delta t} = \frac{x_{r,i} - x_{r,i-1}}{(\Delta t)^2} - \frac{x_{r,i-1} - x_{r,i-2}}{(\Delta t)^2} = \frac{x_{r,i} - 2x_{r,i-1} + x_{r,i-2}}{(\Delta t)^2}$$

$$x_{r,i} = -\ddot{x}_i (\Delta t)^2 + 2x_{r,i-1} - x_{r,i-2} + \frac{c}{M}(x_{r,i-1} - x_{r,i-2})\Delta t - \omega^2 x_{r,i-1} (\Delta t)^2$$

### Modelo No Lineal :

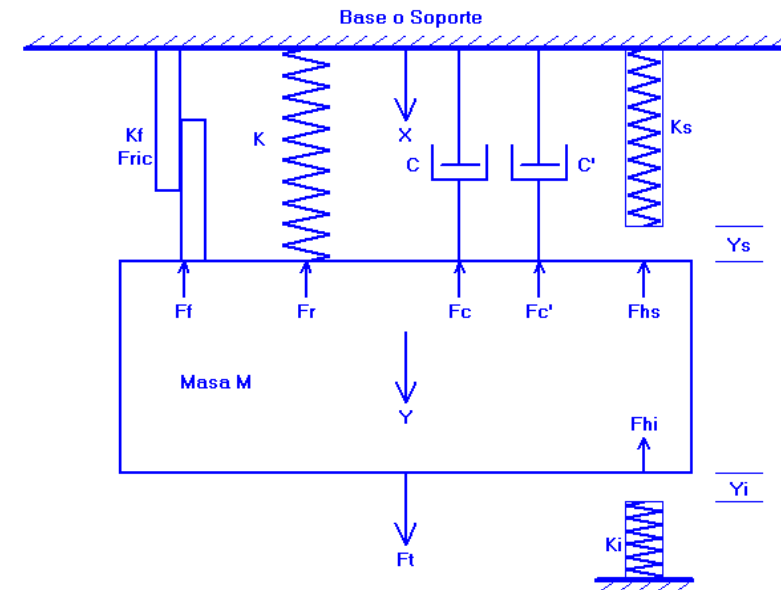
$$\ddot{x}_r + \frac{c}{M}\dot{x}_r + \frac{F(x_r)}{M} = -\ddot{x}_i$$

$$\frac{x_{r,i} - 2x_{r,i-1} + x_{r,i-2}}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{M} \frac{x_{r,i-1} - x_{r,i-2}}{\Delta t} + \frac{F_i(x_{r,i-1})}{M} = -\ddot{x}_i$$

$$F_i(x_{r,i-1}) = F_{i-1}(x_{r,i-2}) + K_{un}(x_{r,i-1} - x_{r,i-2})$$

$$x_{r,i} = -\ddot{x}_i (\Delta t)^2 + 2x_{r,i-1} - x_{r,i-2} + \frac{c}{M}(x_{r,i-1} - x_{r,i-2})\Delta t - \frac{F_{i-1}(x_{r,i-2}) + K_{un}(x_{r,i-1} - x_{r,i-2})}{M} (\Delta t)^2$$

### MODELO DINAMICO = MASA + RESORTE BILINEAL K (K1;K2) + PISTON 5%



M=1319 t. K1=69079 kN/m K2=25384 kN/m Amor = 5% T=0.87 s

## Técnicas numéricas de resolución de ec.del movto

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = -M\ddot{x}_i(t)$$

Esquemas implícitos : Newmark, Wilson, Houbolt

Esquemas explícitos : Diferencias centrales

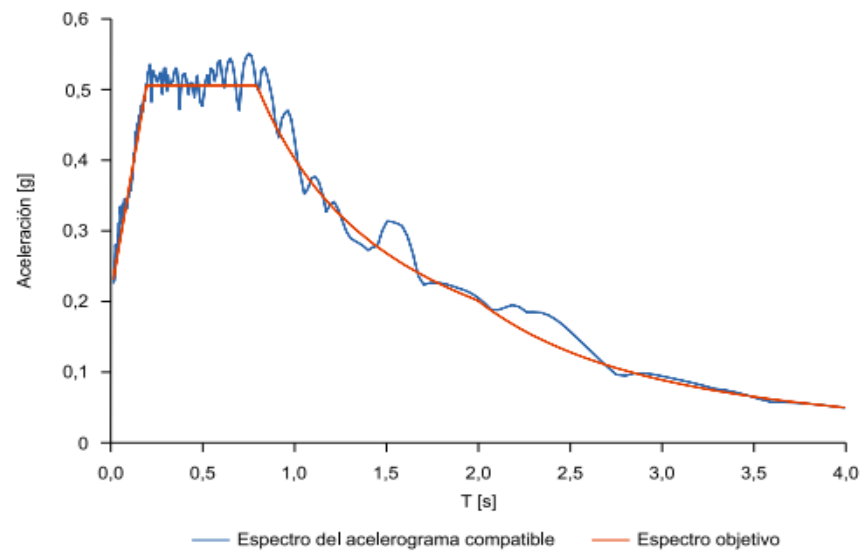


Figura 41 Espectro del acelerograma compatible y comparación con el espectro objetivo

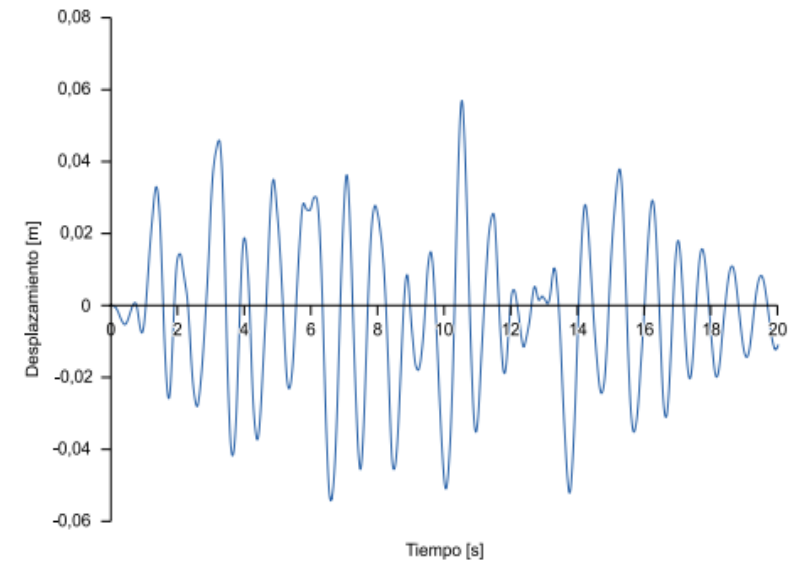


Figura 59 Historia de desplazamientos relativos respecto del terreno del cálculo no lineal

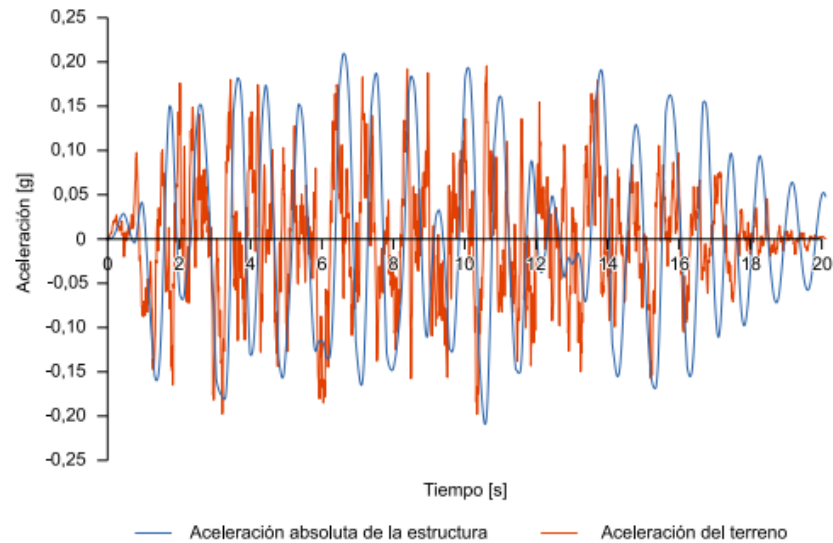


Figura 60 Historia de aceleraciones del terreno y absolutas de la estructura, resultantes del cálculo no lineal

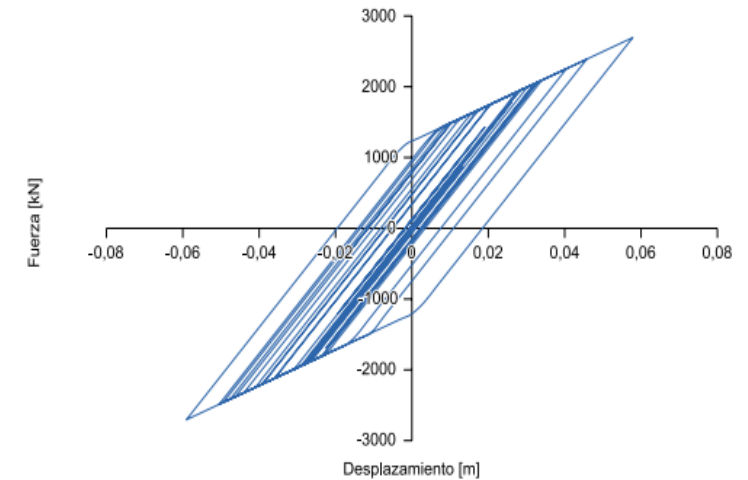
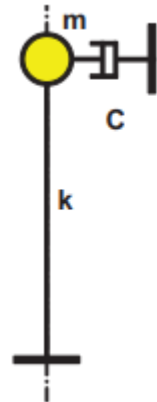


Figura 61 Diagrama fuerza-desplazamiento

# Ejemplo del Método estático No Lineal



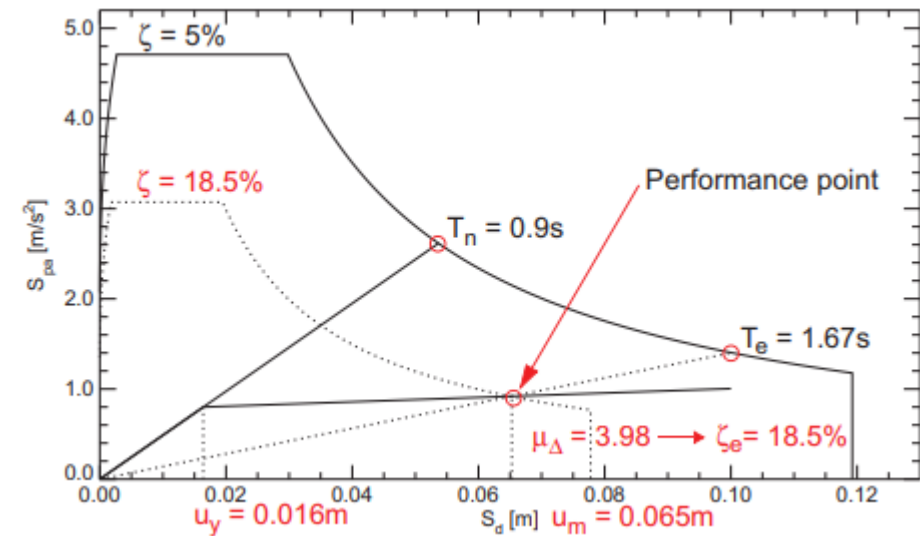
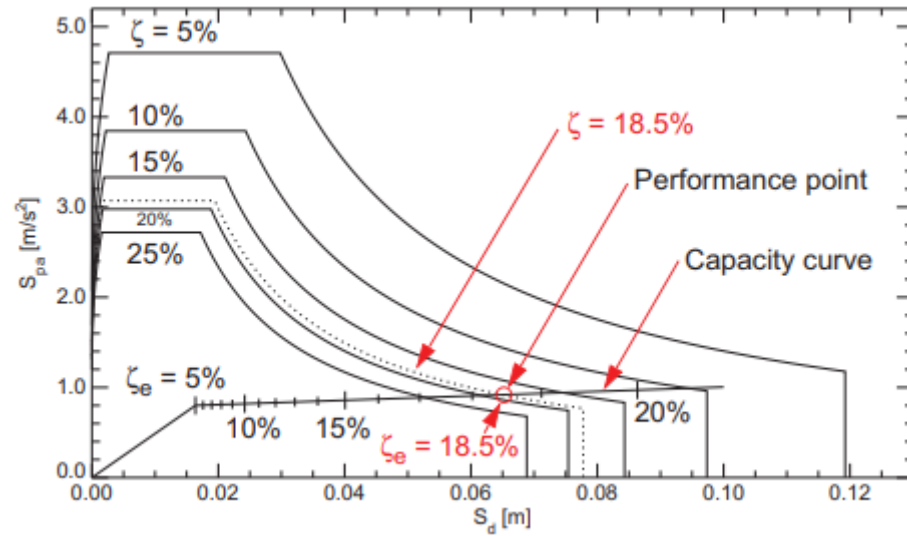
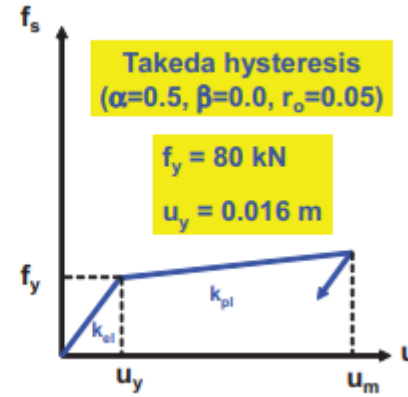
Properties:

$m = 100 \text{ t}$

$k_{el} = 4874 \text{ kN/m}$

$k_{pl} = 244 \text{ kN/m}$

$\zeta = 5\%$





# Método del Modo Fundamental

Igual a Método modal espectral con 1 solo gdl (desacoplado por cada dirección x, y)

Dirección longitudinal (x) : Tablero continuo y recto. Masa pilas < Masa tablero / 5

Dirección transversal (y) : eo = centro de rigidez de las pilas-centro de masas del tablero < L/20

## Modelo de Tablero Rígido:

En dirección longitudinal casi siempre.

En dirección transversal  $L/B < 4$  ó  $\Delta d/dm < 0.20$  (Indeformable)

Fuerza = Masa \* Aceleración :  $F = M S_d(T)$  ; Periodo :  $T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{K}}$

Fuerza en cada pila proporcional a su rigidez ; Torsor =  $M_i = F e = F (e_o + e_a)$

## Modelo de Tablero Flexible:

Tablero deformable = Viga - discretizada en N nudos- sobre NV+1 apoyos elásticos.

Los pesos  $G_i$  corresponden a la parte de G que tributa sobre el nudo i. ( $M_i = G_i/g$ )

La distribución de desplazamientos  $d_i$  indica la deformación del tablero

Los apoyos elásticos serán de rigidez  $K_i$  igual a las de las pilas y estribos

Periodo según fórmula Rayleigh  $\rightarrow$  .....

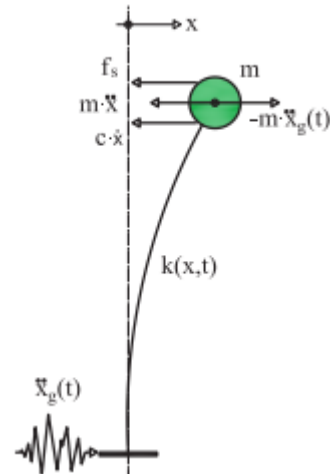
Fuerza sobre pila i = Reacción apoyo elástico

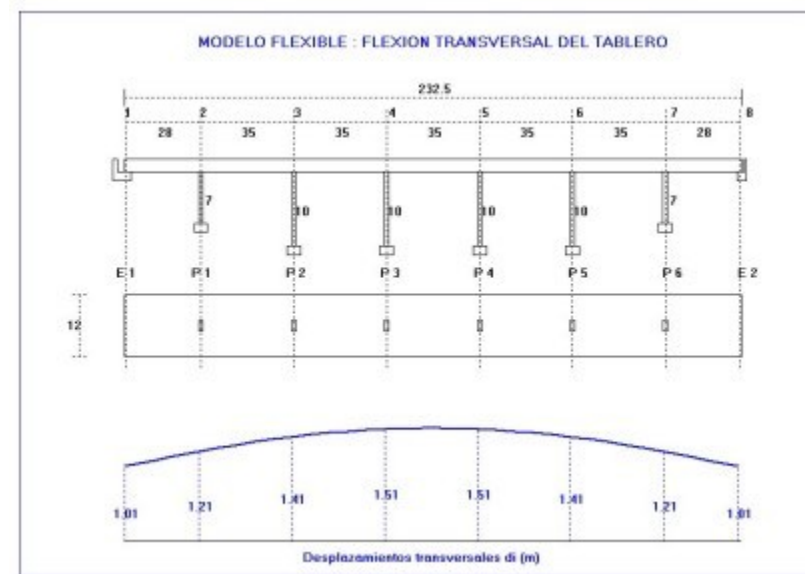
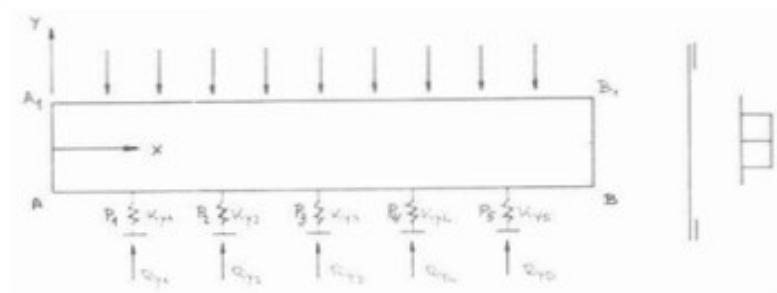
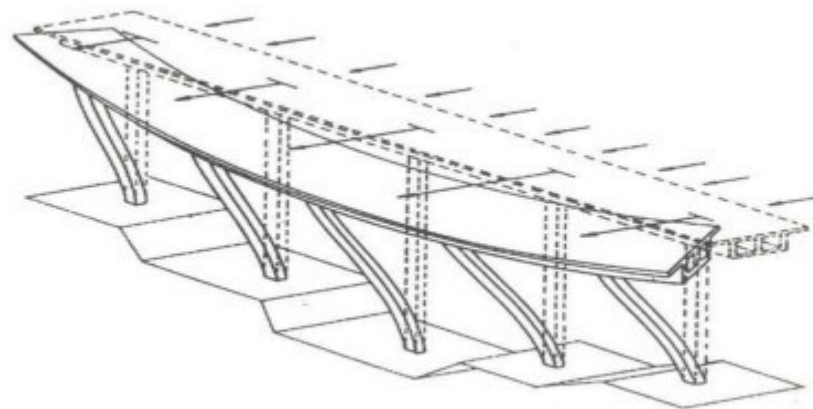
## Modelo de Pila Aislada:

$$F_i = M_i S_d(T_i) \quad T_i = 2\pi \sqrt{\frac{M_i}{K_i}}$$

$$F_i = \frac{4\pi^2}{gT^2} S_d(T) d_i M_i$$

$$\dots \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{\sum_i M_i d_i^2}{g \sum_i M_i d_i}}$$





## Esquema estático del tablero flexible

## Desplazamientos :

$$d_{Ee} = S_d(T) \left[ \frac{T}{2\pi} \right]^2$$

$$\mu_d = \begin{cases} q & \text{si } T \geq T_o = 1,25 T_C \\ \left( (q-1) \frac{T_o}{T} + 1 \leq 5q - 4 \right) & \text{si } T < T_o = 1,25 T_C \end{cases}$$

$$d_E = \pm \mu_d \eta d_{Ee}$$

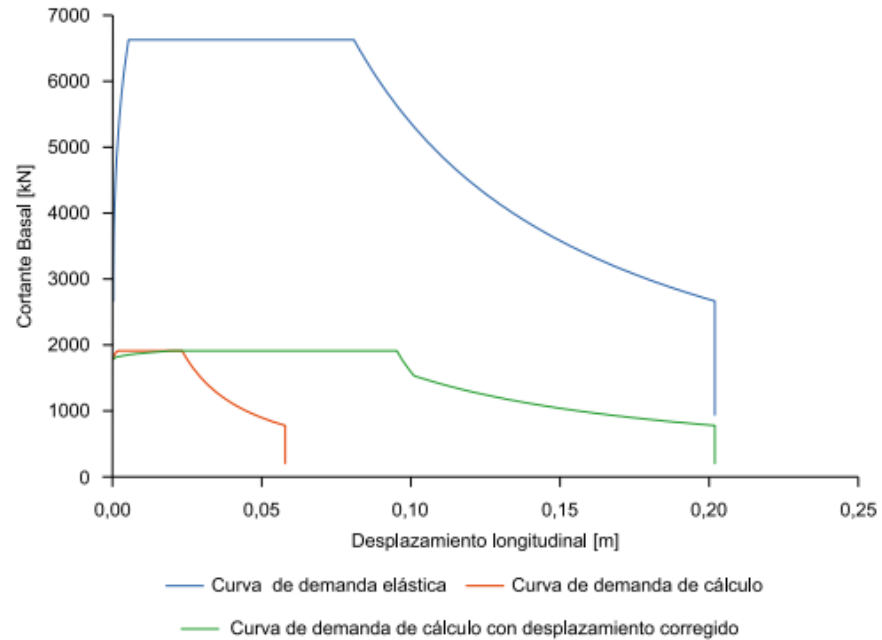


Figura 79 Curvas cortante basal-desplazamiento longitudinal

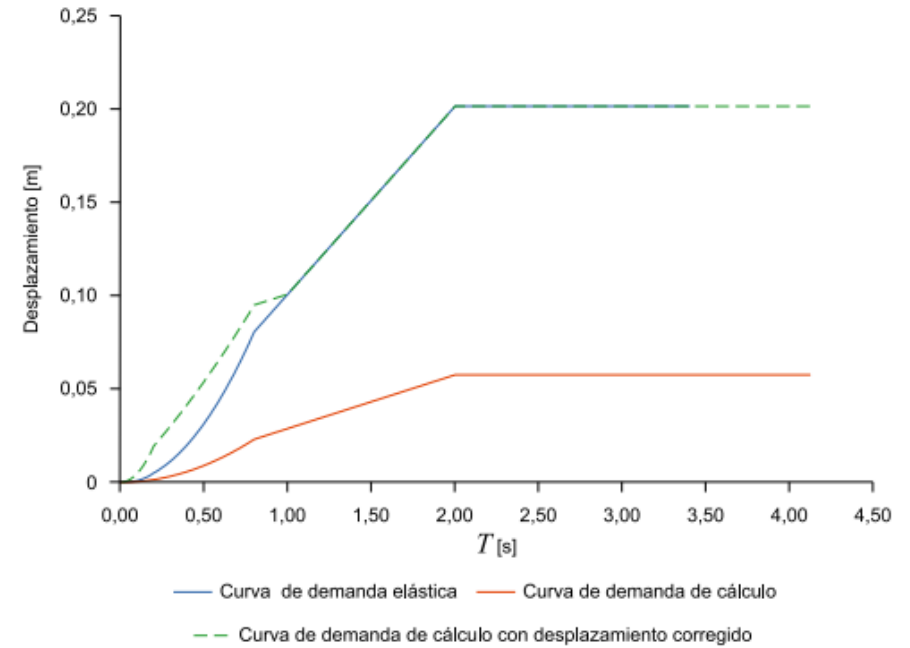


Figura 80 Desplazamientos espectrales

**Peso G y Masa M vibrante :  $G = PP + CM + SC_{per} \rightarrow M = G/g$**

$PP = P_{tab} + 0.5 * P_{pilas}$  (Peso del tablero + Peso mitad superior de las pilas)

$CM = \text{Carga Muerta} = \text{Pavimento} + \text{Barreras} = 1.5 (L_{tab} * B_{tra} * h_b * \gamma_b) + 2 * Barr * L_{tab}$   
 $L_{tab}$  = Longitud tablero;  $B_{tra}$  = Anchura de tráfico;  $h_b$  = altura y  $\gamma_b$  = densidad bituminosa;  $Barr$  = Peso por metro de barrera.

$SC_{per} = \text{Sobrecarga permanente uniforme (20\%)} = 0.2 \times \{0.9 \times 3 + (B_{tra} - 3) \times 0.25\} \times L_{tab}$

IAP-11

TABLA 4.1-b VALOR CARACTERÍSTICO DE LA SOBRECARGA DE USO

SITUACIÓN	VEHÍCULO PESADO $2Q_{ik}$ [kN]	SOBRECARGA UNIFORME $q_{ik}$ (ó $q_{rk}$ ) [kN/m <sup>2</sup> ]
Carril virtual 1	2 · 300	9,0
Carril virtual 2	2 · 200	2,5
Carril virtual 3	2 · 100	2,5
Otros carriles virtuales	0	2,5
Área remanente ( $q_{rk}$ )	0	2,5

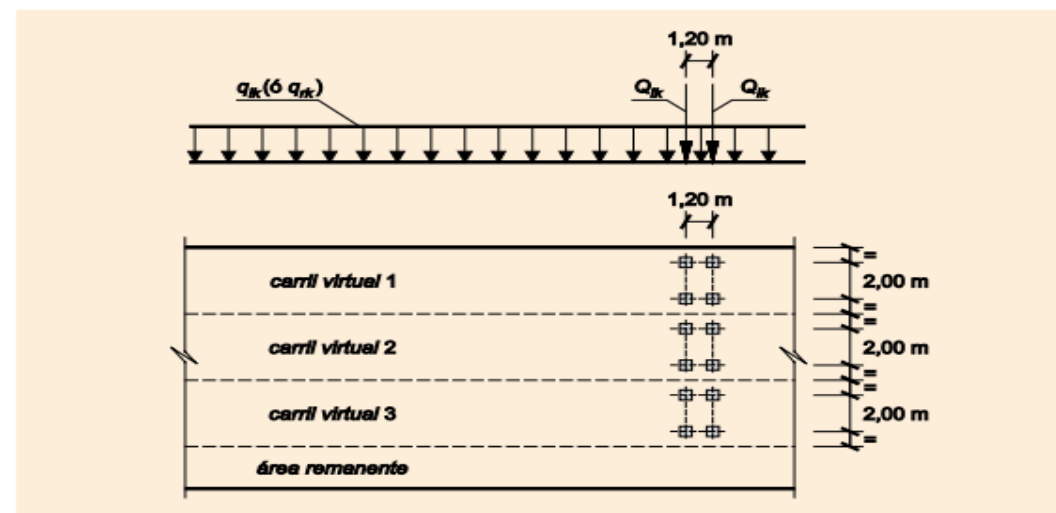
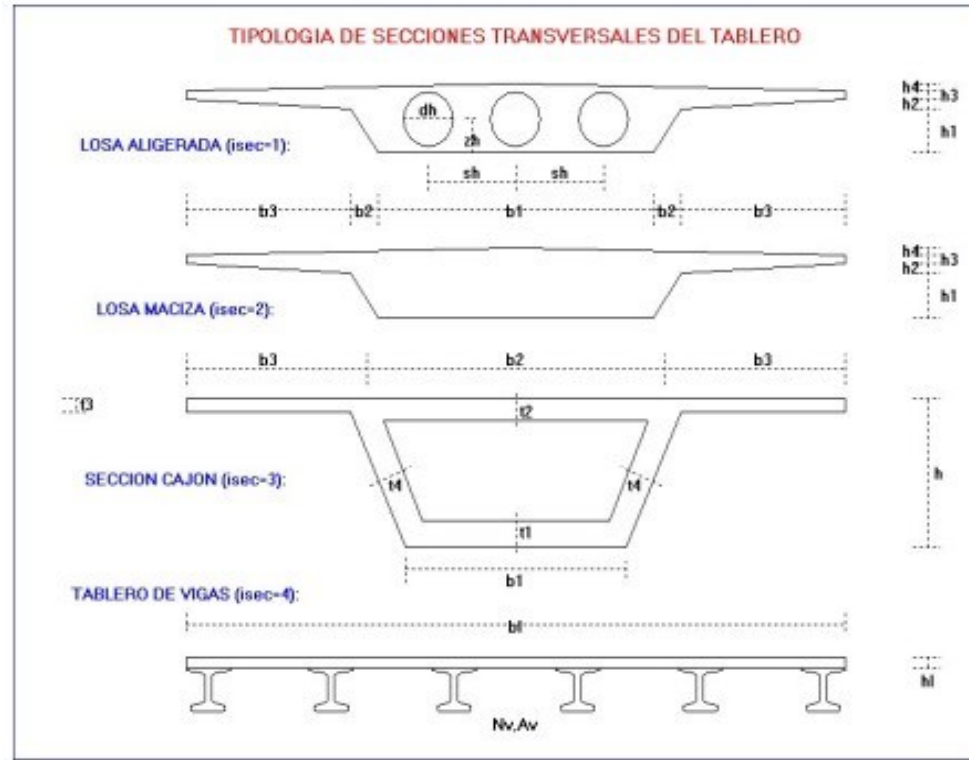


FIGURA 4.1-b DISTRIBUCIÓN DE VEHÍCULOS PESADOS Y SOBRECARGA UNIFORME



Variables de la sección para cálculo de pesos y rigideces :  $B_{tab}$ ,  $Stab$ ,  $Itab$ ,  $J$  :

- Cálculo directo desde fuera de la aplicación (isec=0)
- Cálculo por la aplicación definiendo valores geométricos según tipo de sección (isec=1 a 4)

## Dirección longitudinal del puente

### Rigideces de pilas, estribos y apoyos :

Rigidez de la pila :  $K_p = k * \beta * EI / h^3$  (k =12 pila biempotrada ; k = 3 pila empotrada-mensula)

Factor de empotramiento  $k = 12 (1+\alpha)/(4+\alpha)$  con  $\alpha = GJ/EI'$  (k=12 biempotrada y k=3 en mensula)

Factor de fisuración  $\beta$  entre 0.4 y 1. Función de la esbeltez  $\lambda = L_p/r_g$  ( $L_p = L$  de pandeo ;  $r_g =$  radio de giro)

$EI =$  Rigidez bruta.  $EI =$  Rigidez eficaz  $= E * J_{ef}$  con  $J_{eff} = 0,08J_{un} + J_{cr} = 0,08J_{un} + \frac{M_y}{E_c \Phi_y}$  (Para comportamiento dúctil)

Rigidez de los neoprenos :  $K_n = G_n * A_n / h_{gn}$

Rigidez conjunto pila + neopreno : (en serie suma flexibilidades) :  $K_{px} = 1/(1/k_p + 1/k_n) = K_p * K_n / (k_p + k_n)$

Rigidez longitudinal total del puente  $K_x = \sum K_{px}$  (Suma de las rigideces de todas las pilas o mejor fustes con sus neoprenos. Incluidos los estribos)

### Periodo , Aceleraciones , Fuerzas y desplazamientos :

$T_x = 2 \pi \sqrt{M/K_x}$  → Aceleración espectral elástica y de diseño :  $S_e(T_x)$  y  $S_d(T_x)$  según Eurocódigo 8

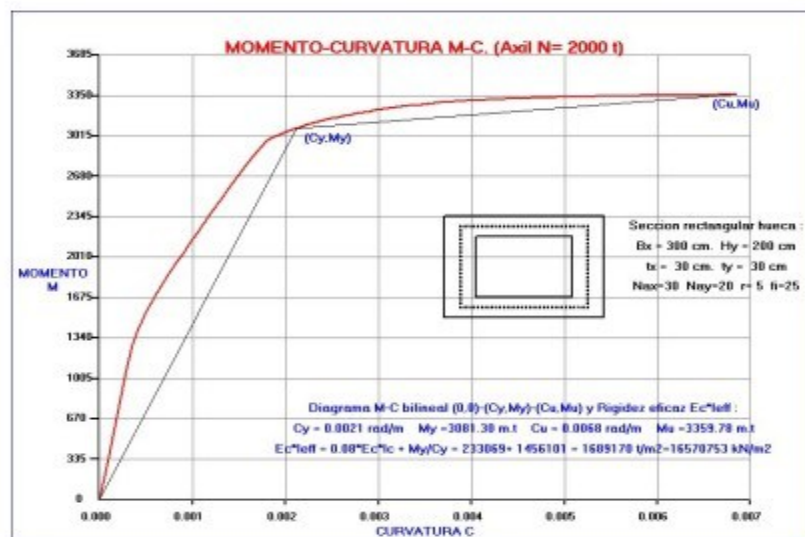
Fuerza sísmica equivalente :  $F_x = M * S_d(T_x)$

Fuerzas y desplazamientos en pilas, estribos y neoprenos :

$F_{xi} = (k_{px})_i / K_x * F_x$  ;  $d_{xi} = F_{xi} / K_{px}$  ;  $d_{px} = F_{xi} / K_p$  ;  $d_{nx} = F_{xi} / K_n$  ;  $G_{nx} = d_{nx} / h_{ng} * 100$

### Datos geométricos pilas, estribos y apoyos :

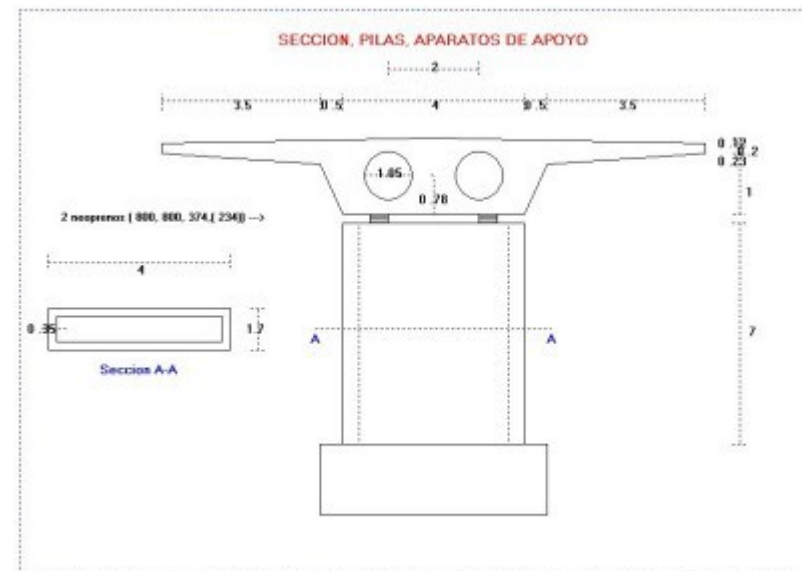
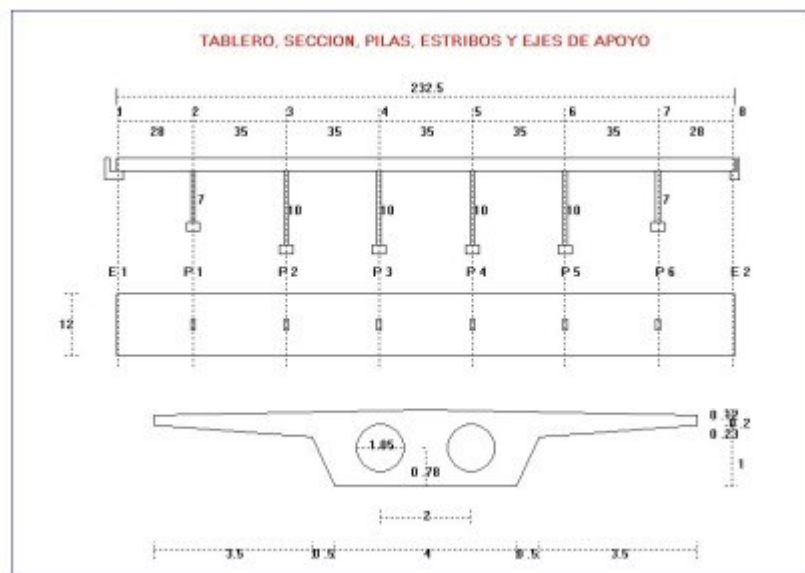
Número de fustes, altura y sección circular o rectangular maciza o hueca. Número y dimensiones de neoprenos.



Datos de Pilas, estribos y neoprenos :

Pila	i	Nf	Cir	bx	by	Esp	hz	Neo	bnx	bny	hn	hng
-	-	-	-	(m)	(m)	(m)	(m)	-	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)
E1	1	0	0	0.00	0.00	0.000	0.00	2	800	800	374	234
P1	2	1	0	1.70	4.00	0.350	7.00	2	800	800	374	234
P2	3	1	0	1.70	4.00	0.350	10.00	2	800	800	374	234
P3	4	1	0	1.70	4.00	0.350	10.00	2	800	800	374	234
P4	5	1	0	1.70	4.00	0.350	10.00	2	800	800	374	234
P5	6	1	0	1.70	4.00	0.350	10.00	2	800	800	374	234
P6	7	1	0	1.70	4.00	0.350	7.00	2	800	800	374	234
E2	8	0	0	0.00	0.00	0.000	0.00	2	800	800	374	234

Nf = Numero de fustes por pila. Neo = Numero de neoprenos por pila.  
 Cir=0 Fustes rectangulares bx x by. Cir=1 Fustes circulares diametro bx  
 Esp>0 Pilas huecas de espesor esp. Esp=0 Pilas macizas rectang y circu.  
 Cir=0 Neoprenos rectang. bnx x bny. Cir=1 Neopreno circular diametro bnx  
 hz = altura de la pila. hn = espesor neopreno. hng= espesor goma neopreno  
 Pila empotrada en tablero cuando Neo = 0 o bnx = 0 o hn = hng = 0  
 Si Nf=0 no hay fustes ---> Apoyo directo en cabezal caso de estribos





# Dirección transversal del puente

Deformabilidad tablero =  $\Delta d/dm \rightarrow <0.2$  Tablero rígido ;  $>0.2$  Tablero flexible ;  $\Delta d = d_{\max} - d_{\min}$   
Tablero rígido : Rigidez, periodo, aceleración, fuerzas y desplazamientos análogo al sismo longitudinal.

**Tablero flexible** = Viga sobre apoyos elásticos :

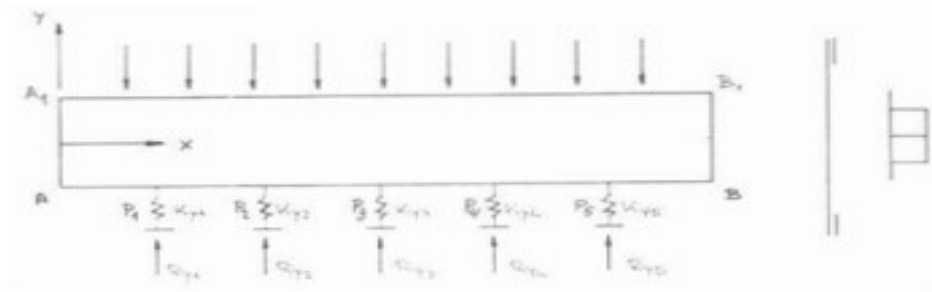
N nudos de peso  $G_i$  y desplazamiento transversal  $d_i$

NV+1 apoyos elásticos (estribos+ pilas + neoprenos ) de rigidez  $K_{pyi} = 1/(1/k_p + 1/k_n) = K_p * K_n / (k_p + k_n)$

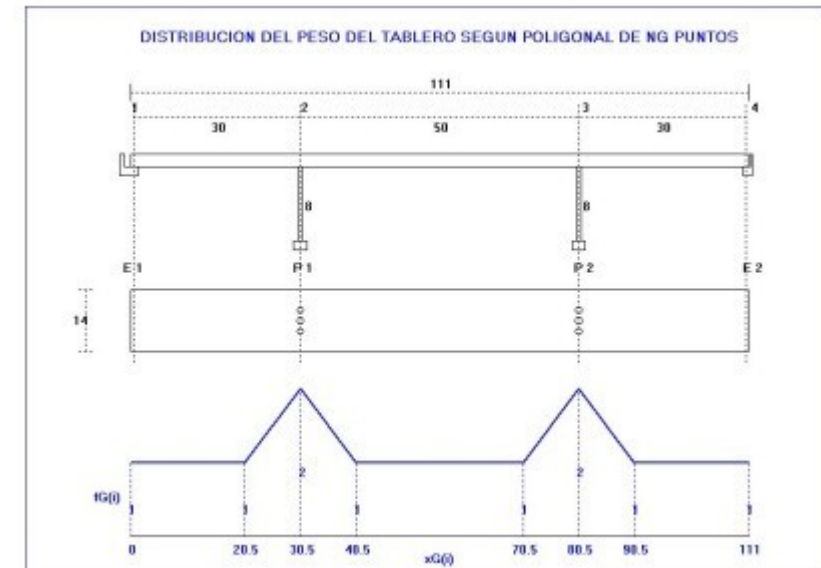
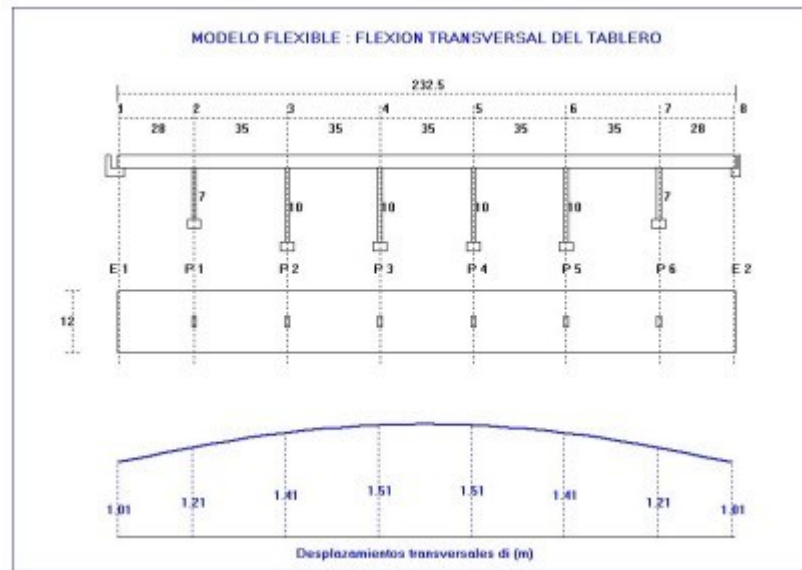
Viga sobre apoyos elásticos de rigidez  $K_{pyi}$ .

Periodo de vibración transversal (Rayleigh) :  $T_y = 2\pi \sqrt{\frac{\sum_i M_i d_i^2}{g \sum_i M_i d_i}}$   $F_i = \frac{4\pi^2}{g T^2} S_d(T) d_i M_i$

Escalado de los desplazamientos  $d_i$  .....  $esc = S_d(T_y)/g$   
 $d_{yi}$  = desplazamiento conjunto pila+neopreno .....  $d_{yi} = esc * d_i$   
 $F_{yi}$  = Fuerza transversal en pila i = Reacción .....  $F_{yi} = K_{pyi} * d_{yi}$   
 $d_{py}$  = desplazamiento en el extremo de la pila .....  $d_{py} = F_{yi}/K_p$   
 $d_{ny}$  = desplaz. relativo entre caras del neopreno .....  $d_{ny} = F_{yi}/K_n$   
 $G_{ny}$  = % de distorsion caras del neopreno .....  $G_{ny} = d_{ny}/H_{ng} * 100$   
 $F_y$  = Fuerza sismica transversal total .....  $F_y = \sum F_{yi}$



## Peso variable según poligonal de NG puntos (xgi, fgi)



# EJEMPLO DEL METODO DEL MODO FUNDAMENTAL



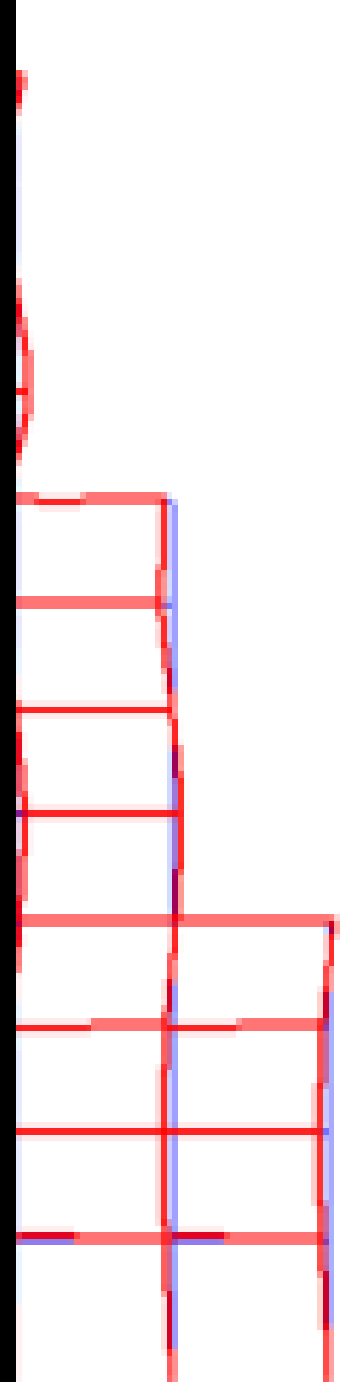


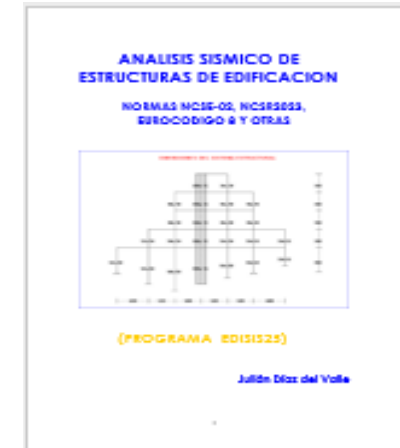
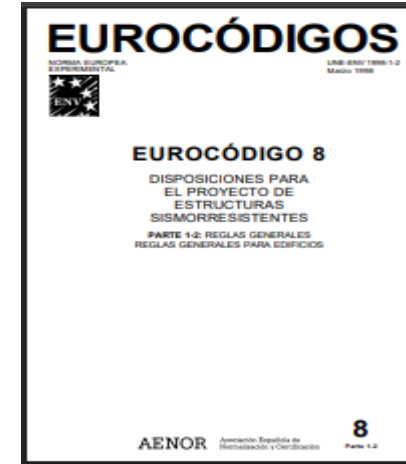
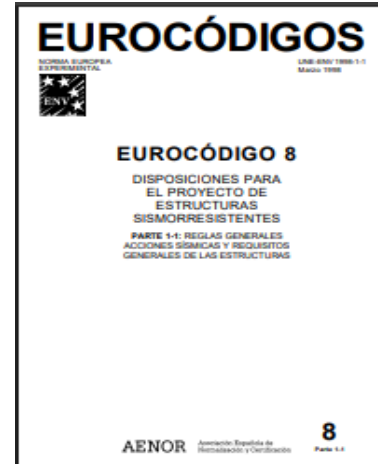
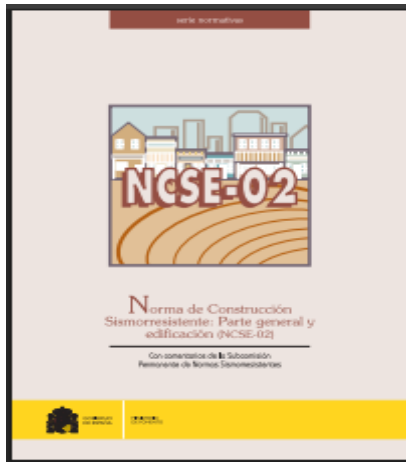
# Curso Sísmico de Edificios Colegio de Ingenieros de Camino de Cantabria

Impartido por Julián Díaz del Valle [www.diaval.es](http://www.diaval.es)

Profesor jubilado de la Escuela de Ingenieros de Santander

(24 y 25 de Septiembre de 2025)





## Referencias :

- NCSE-02 Norma Construcción Sismorresistente de Edificios
- Eurocódigo 8 . UNE-ENV- 1998-2. Parte 1.1 General
- Eurocódigo 8 . UNE-ENV-1998-2. Parte 1.2 Edificios
- Manual programa EDISIS25 de Cálculo Sísmico de Edificios

# INDICE

- Normativa sísmica : NCSE-02 , EUROCODIGO 8 y otras.
- Modelos estructurales dinámicos: Rigidez de los forjados, Edificios de cortante, Edificios de dintel flexible, Edificios a base de pórticos y pantallas o muros de corte. Matrices de rigidez, de masas y de amortiguamiento.
- \* Análisis modal : Calculo de modos y frecuencias de vibración y superposición modal .
- Técnica modal espectral : Cálculo de desplazamientos, aceleraciones, fuerzas, cortantes y momentos en cada planta y en cada modo.
- Combinación modal con técnicas estadísticas (ABSUM, SRSS y/o CQC)
- Método simplificado de cálculo
- Métodos no lineales de cálculo.
- Aislamiento y disipación en edificios.
- Ejemplos de aplicación.

# MODELO DINÁMICO DEL EDIFICIO

Gdl estáticos y dinámicos. Reducción. Rigidez forjados. Simetrías, desacoplamientos y condensaciones.

**Edificios de cortante:** Forjados de rigidez infinita. 1 gdl por planta (movimiento horizontal del forjado).

Rigidez de columna biempotrada  $K_i = 12EI/h_i^3$  ; Columna articulada empotrada  $K_i = 3EI/h_i^3$

$K_i = \Sigma$  de las rigideces de todas las columnas del entrepiso.

Matriz de rigidez global tridiagonal (NPxNP) (NP= nº de plantas) :

$$K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & & \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & & \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & k_{N-1} + k_N & -k_N \\ & & & -k_N & -k_N \end{pmatrix}$$

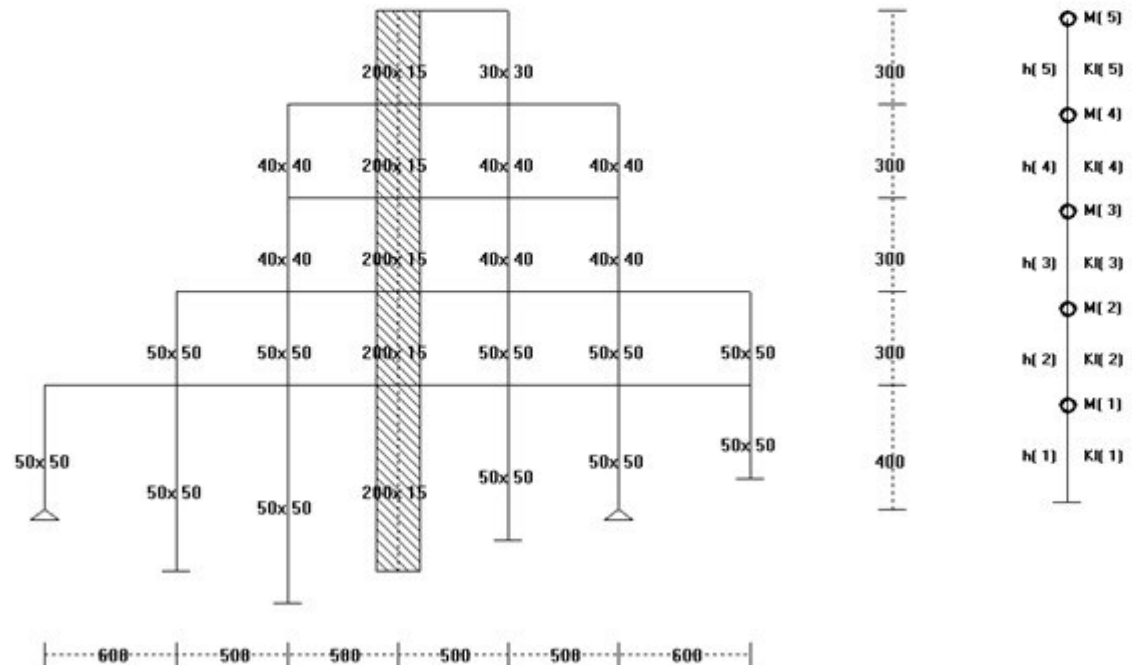
Matriz de Masas diagonal ( $M_i$  = Masa de planta i)

Muros pantalla (Incluir rigidez a cortante):

$$K_i = 12EI/h_i^3/Q$$

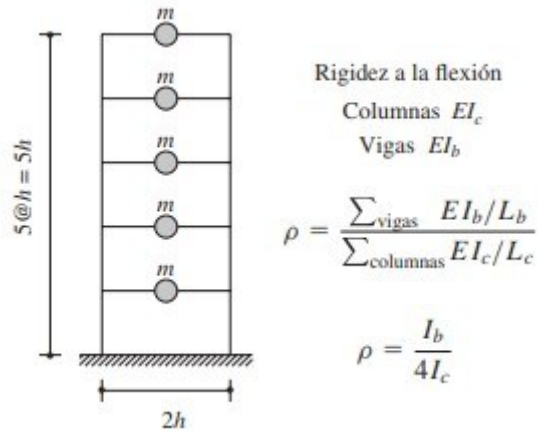
$$Q = 1 + \alpha ; \alpha = 12EI/GA_c ; A_c = 5/6 * b_x * b_y$$

DIMENSIONES DEL SISTEMA ESTRUCTURAL





# Pórticos con dinteles flexibles



Matriz de rigidez llena. (NPxNP)  
Técnica de Guyan de reducción de gdl.

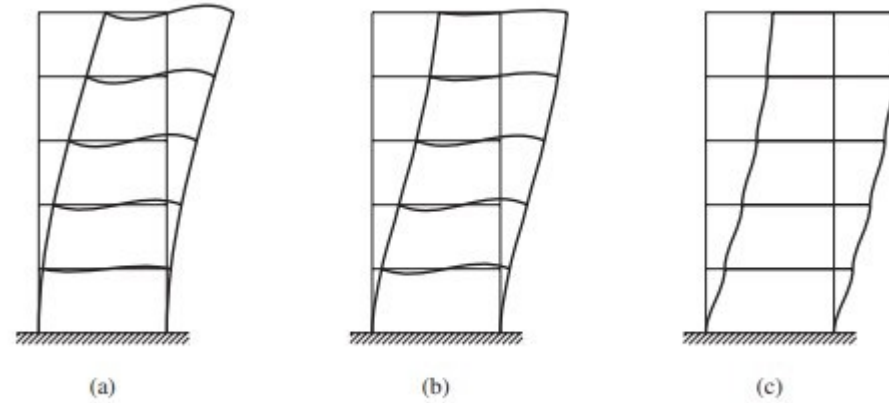


Figura 19.1.2 Formas modificadas: (a)  $\rho = 0$ ; (b)  $\rho = \frac{1}{8}$ ; (c)  $\rho = \infty$ .

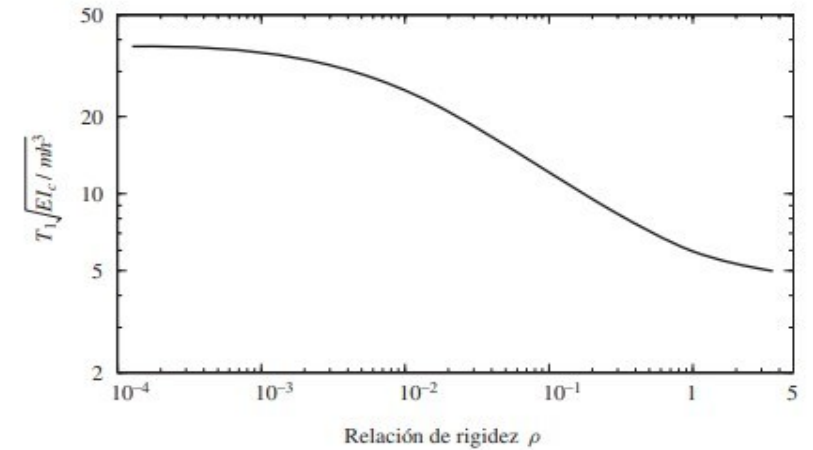


Figura 19.1.3 Periodo fundamental de vibración de los marcos uniformes de cinco niveles.

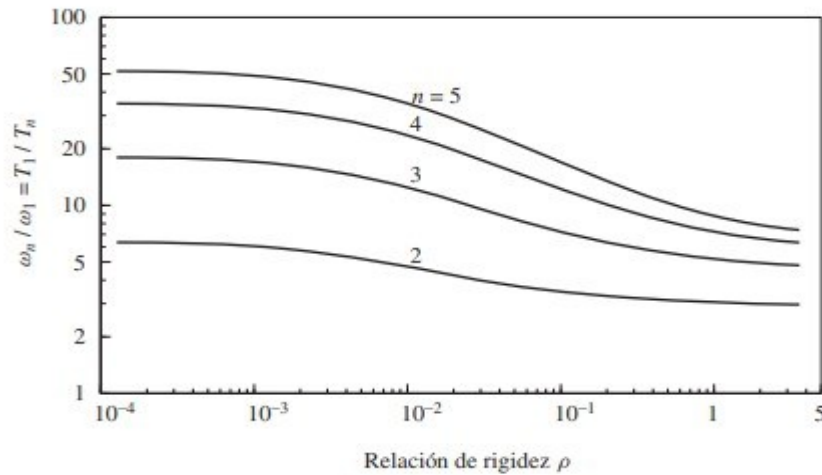


Figura 19.1.4 Relaciones del periodo natural de vibración para los marcos uniformes de cinco niveles.  
(Desarrollados por Roehl, 1971).

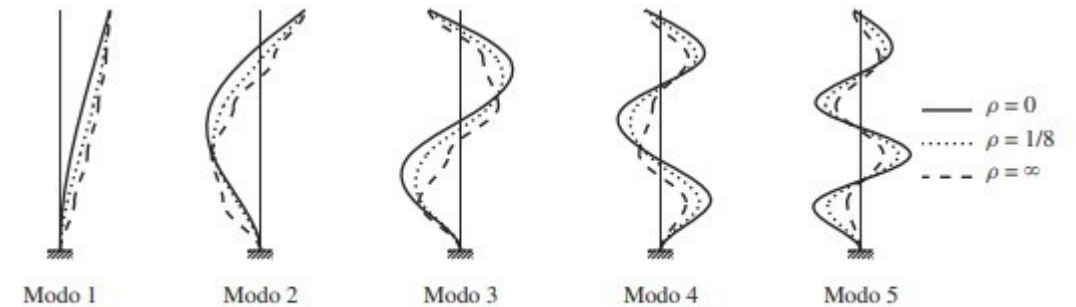


Figura 19.1.5 Modos naturales de vibración del marco uniforme de cinco niveles para tres valores de  $\rho$ .

# ANALISIS MODAL

Estructura con n gdl  $\{\mathbf{u}\}^T = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)\}$

Ecuación del movimiento  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = -\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{a}(t) \rightarrow$  n ec. diferenciales acopladas (Complejo)

Ec.vibraciones libres no amortiguadas  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \rightarrow (1)$  Solución  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{B} \sin(\omega t + \phi) \rightarrow \{\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}\} \mathbf{B} = \mathbf{0}$

$\mathbf{B} = \mathbf{0}$  (Trivial) ó  $|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0$  Ec.característica:  $\omega^{2n} + \alpha_1 \omega^{2n-2} + \alpha_2 \omega^{2n-4} + \dots + \alpha_{n-1} \omega^2 + \alpha_n = 0$

K y M reales simétricas y def.positivas (Ojo con  $M_k = 0$ )

$\rightarrow$  n valores propios  $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 \dots < \omega_n$  como  $T = 2\pi/\omega \rightarrow T_1 > T_2 > T_3 \dots > T_n$

El modo fundamental corresponde a la menor frecuencia  $\omega_1$  y al mayor periodo  $T_1$

El autovalor  $\omega_i$  está asociado al autovector o modo  $\mathbf{B}_i$ .

Las n coordenadas  $B_{ik}$ , del modo  $\mathbf{B}_i$  se deducen de (1) -homogénea- por lo que estarán en función de una de ellas.  $\mathbf{B}_i$  más que un vector es una “forma o modo”

Normalización del modo  $\mathbf{B}_i$ :  $B_{i1} = 1$ . ó  $|\mathbf{B}_i| = 1$  ó la mejor  $\mathbf{B}^T \mathbf{M} \mathbf{B} = \mathbf{I}$

Ortogonalidad de autovectores  $\mathbf{B}_i$  y  $\mathbf{B}_j$ :  $\mathbf{B}_i^T \mathbf{M} \mathbf{B}_j = \mathbf{0}$ ;  $\mathbf{B}_i^T \mathbf{K} \mathbf{B}_j = \mathbf{0}$  Para  $i < j$

Matricialmente  $\mathbf{M}^* = \mathbf{B}^T \mathbf{M} \mathbf{B} = \mathbf{I}$  (Ortonormal)  $\mathbf{K}^* = \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{B}$  (Ortogonal)

$\mathbf{M}^*$  y  $\mathbf{K}^*$  son diagonales y se forzará que  $\mathbf{B}_i^T \mathbf{C} \mathbf{B}_j = \mathbf{0}$ ;  $\mathbf{C}^* = \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}$

# SUPERPOSICION MODAL

Realizando en (1) el cambio de variables :  $\mathbf{u} = \mathbf{B} \mathbf{q}$  ;  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}$  ;  $\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{B} \ddot{\mathbf{q}}$  (2) y premultiplicando por  $\mathbf{B}^T$

$$\mathbf{B}^T \mathbf{M} \mathbf{B} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{B} \mathbf{q} = -\mathbf{B}^T \mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{a}(t) \quad \rightarrow \quad \mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^* \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}^* \mathbf{q} = -\mathbf{B}^T \mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{a}(t) \quad (3)$$

sistema de ec. diferenciales **desacopladas** pues las matrices modales  $\mathbf{M}^*$ ,  $\mathbf{C}^*$ ,  $\mathbf{K}^*$  son diagonales. ( $\mathbf{J}$  = vector de arrastre = columna de unos)

Se tienen pues n ecuaciones independientes cada una de equilibrio según un modo de vibración i

Es decir, se tiene n sistemas independientes de 1 gdl de la forma :

$$\mathbf{M}_i^* \ddot{q}_i + \mathbf{C}_i^* \dot{q}_i + \mathbf{K}_i^* q_i = -\mathbf{B}_i^T \mathbf{M} \mathbf{J} \mathbf{a}(t) \quad (4)$$

$$\text{Dividiendo (4) por } \mathbf{M}_i^* = \mathbf{B}_i^T \mathbf{M} \mathbf{B}_i = 1 \quad \rightarrow \quad \ddot{q}_i(t) + 2 \xi_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = -L_i \mathbf{a}(t) \quad (5)$$

Esta ec.dif. dá el movimiento según el modo i-simo sometido a una “parte” de la aceleración  $\mathbf{a}(t)$  que solicita a toda la estructura.

$L_i = \mathbf{B}_i^T \mathbf{M} \mathbf{J} / \mathbf{B}_i^T \mathbf{M} \mathbf{B}_i = \mathbf{B}_i^T \mathbf{M}$  se define coeficiente de participación modal del modo i.

Cada ecuación (5) permite obtener el desplazamiento  $q_i(t)$  para cada modo. Para ello se puede integrar de forma exacta “piecewise”, paso a paso, integral de Duhamel , espectros de respuesta etc.

La solución buscada  $\mathbf{u}(t)$  se obtiene por superposición de las  $q_i(t)$  obtenidas para cada modo :

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{B} \mathbf{q}(t) = \mathbf{B}_1 q_1(t) + \mathbf{B}_2 q_2(t) + \mathbf{B}_3 q_3(t) + \dots + \mathbf{B}_n q_n(t) \quad \rightarrow \quad \mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i q_i(t)$$

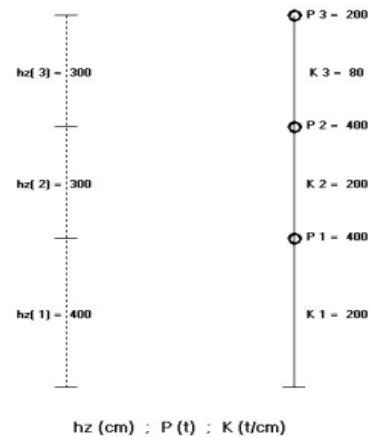
Veremos que sólo son necesarios los primeros m modos ( $m < n$ ) de forma que  $\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^m \mathbf{B}_i q_i(t)$

La superposición exige **linealidad**.

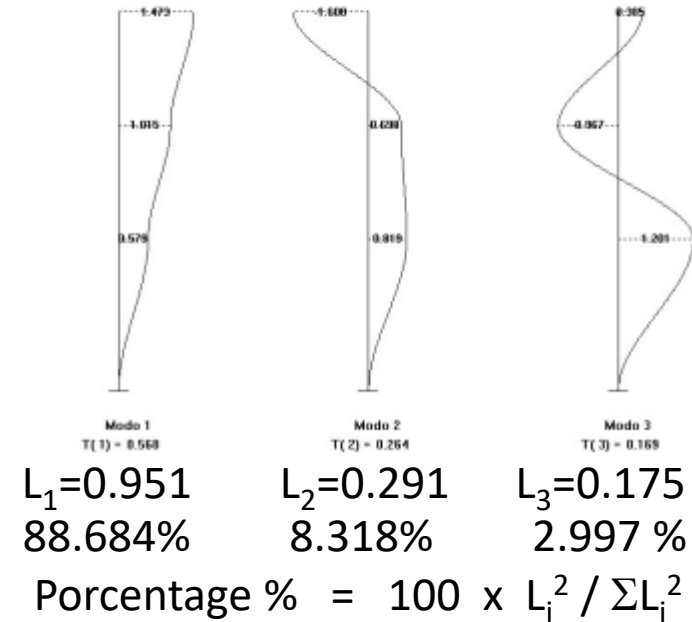
# Número de modos a considerar :

Coeficiente de **participación del modo i** :  $L_i = \mathbf{B}_i^T \mathbf{M} \mathbf{J} / \mathbf{B}_i^T \mathbf{M} \mathbf{B}_i$  (en caso ortomormal :  $\mathbf{B}_i^T \mathbf{M} \mathbf{B}_i = 1$ ) será  $L_i = \mathbf{B}_i^T \mathbf{M} \mathbf{J}$   
 Es fácil deducir que  $L_1 > L_2 > L_3 \dots$  pues el 2º modo está más deformado que el 1º pues tiene áreas negativas que disminuyen el producto de la masa \* el modo y así sucesivamente.

DIMENSIONES DEL SISTEMA ESTRUCTURAL



MODOS Y PERIODOS DE VIBRACION



En general las normas sísmicas exigen que la suma de la participación modal de los modos a considerar debe llegar al 90% de la de todos los modos. Para edificios de cortante se exige considerar 1 a 3 modos.  
 Ventajas de  $m \ll n$  Menor tiempo de computación ; Se evitan errores de los modos superiores (muy flexibles).

# TECNICA MODAL ESPECTRAL

Para cada modo  $i$  considerado, se determina la aceleración de diseño  $a_d(i)$ , entrando con su periodo  $T_i$ , en el espectro de la norma elegida, previa su corrección por amortiguamiento y ductilidad.

A partir de ahí -utilizando la formulación del cálculo modal- se obtienen para cada modo  $i$  y planta  $k$ , los valores máximos de las aceleraciones  $a(i,k)$ , desplazamientos  $u(i,k)$ , desviaciones  $du(i,k)$ , fuerzas  $f(i,k)$ , cortantes  $V(i,k)$  y momentos  $M(i,k)$  :

$a(i,k) = D(i,k) * a_d(i)$  donde  $D(i,k)$  es el factor de distribución en las plantas  $k$  de la aceleración de cálculo  $a_d(i)$  en la base para el modo  $i$

$u(i,k) = a(i,k) / \omega(i)^2$

$u_i(i,k) = u(i,k) * \mu(i)$  = Desplazamiento inelástico ( $\mu(i)$  = Factor reductor por ductilidad)

$du(i,k) = (u_i(i,k) - u_i(i,k-1)) / h(k)$  = Deriva de la entreplanta  $k$

$F(i,k) = M(i) * a(i,k)$  = Fuerza sísmica estática equivalente para la planta  $k$  y el modo  $i$

$V(i,k)$  = Esfuerzo cortante en la planta  $k$  del modo  $i$ .  $V_{base} = V(i,0)$

$M(i,k)$  = Momento flector en la planta  $k$  del modo  $i$ . Momento de vuelco en base =  $M(i,0)$

Las variables modales anteriores ( $r_i$ ), se combinan para todos los modos de vibración considerados ( $i=1$  a  $m$ ), proporcionando las siguientes variables de proyecto asociadas a cada planta  $k$  :

$a(k)$ ,  $u(k)$ ,  $u_i(k)$ ,  $du(k)$ ,  $F(k)$ ,  $V(k)$ ,  $M(k)$

# COMBINACION MODAL

Técnicas de combinación de respuestas modales  $R_i$  :

-ABSSUM = Suma de valores absolutos  $R = \sum_{i=1}^n |R_i|$  (No recomendada)

-SRSS = Raiz cuadrada de suma de cuadrados  $R = \sqrt{\sum_{i=1}^N R_i^2}$

-CQC = Combinacion cuadrática completa  $R = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N R_i \rho_{ij} R_j}$   $\rho_{ij} = \frac{8\xi^2(1+r)r^{3/2}}{(1-r^2)^2 + 4\xi^2r(1+r)^2}$   
con  $r = \omega_i / \omega_j$

Las dos últimas dan resultados análogos salvo que existan periodos de vibracion parecidos, en cuyo caso se recomienda la técnica CQC.

Alguna normativa, recomienda unificar modos de periodos  $T_i$  y  $T_j$  que difieran menos del 10% y sumar el valor absoluto de las respuestas  $R_i$  y  $R_j$

# EJEMPLO DEL METODO MODAL ESPECTRAL



# METODO SIMPLIFICADO

Muros de ladrillo o bloques

Pórtico HA sin pantallas

Pórtico de HA con pantalla

Pórticos de acero

Pórticos de acero+triangulaciones

Periodo Fundamental :

$$T_F = 0,06H \sqrt{H/(2L + H)} / \sqrt{L}$$

$$T_F = 0,09n$$

$$T_F = 0,07n \sqrt{H/(B + H)}$$

$$T_F = 0,11n$$

$$T_F = 0,085n \sqrt{H/(B + H)}$$

Número de modos : **1** ( $TF < 0.75$  s) ; **2** ( $0.75 < TF < 1.25$  s) ; **3** ( $TF > 1.25$ )

Periodos siguientes :  $T_i = \frac{T_F}{(2i - 1)}$  ( $TF/3$  ;  $TF/5$  ....)

$$F_{ik} = s_{ik} \cdot P_k$$

$$s_{ik} = (a_c / g) \cdot \alpha_i \cdot \beta \cdot \eta_{ik}$$

$$\beta = \frac{v}{\mu}$$

$$\eta_{ik} = \Phi_{ik} \frac{\sum_{k=1}^n m_k \Phi_{ik}}{\sum_{k=1}^n m_k \Phi_{ik}^2}$$

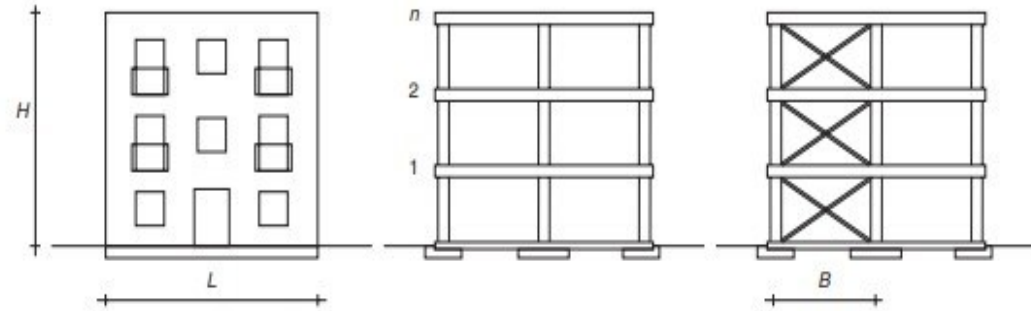


Figura 3.2. Esquema de los diferentes tipos de estructuras

Modos :  $\Phi_{ik} = \sin [(2i - 1) \pi \cdot h_k / 2H]$

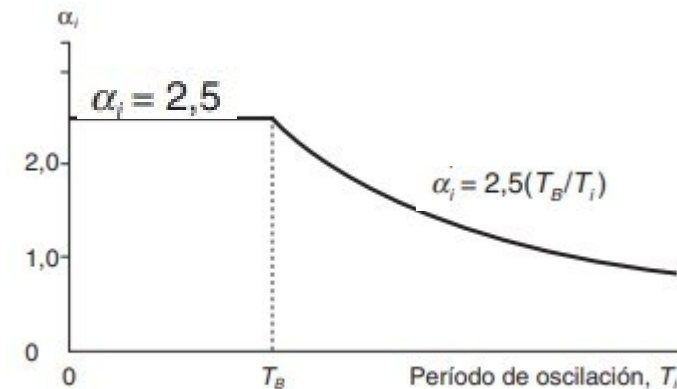


Figura 3.3. Coeficiente  $\alpha_i$  para el método simplificado de cálculo



# METODO SIMPLIFICADO (CONTINUACION)

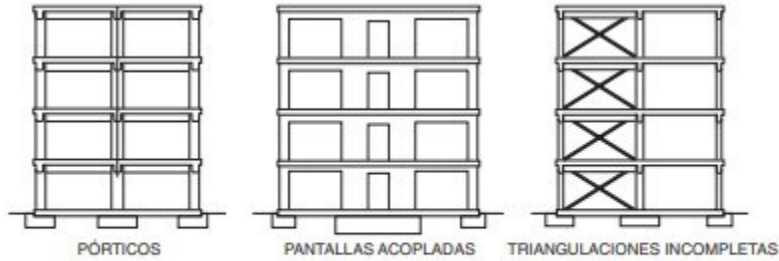


Figura 3.4. Ejemplos de organizaciones estructurales que permiten un valor del coeficiente de comportamiento por ductilidad  $\mu = 4$



Figura 3.5. Ejemplos de organizaciones estructurales que permiten un valor del coeficiente de comportamiento por ductilidad  $\mu = 3$



Figura 3.6. Ejemplos de organizaciones estructurales que permiten un valor del coeficiente de comportamiento por ductilidad  $\mu = 2$

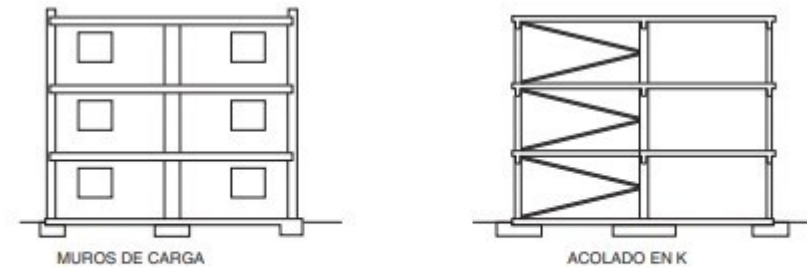


Figura 3.7. Ejemplos de organizaciones estructurales que permiten un valor del coeficiente de comportamiento por ductilidad  $\mu = 1$

$$u = u_e \cdot \mu$$

$$V_k = \sqrt{\sum_{i=1}^r V_{ik}^2}$$

$$f_{kj} = F_k \frac{K_{kj}}{\sum_{j=1}^n K_{kj}}$$

$$P_k \cdot d_k < 0,10 V_k \cdot h_k$$

$$\gamma_a = 1 + 0,6 \frac{x}{L_e}$$

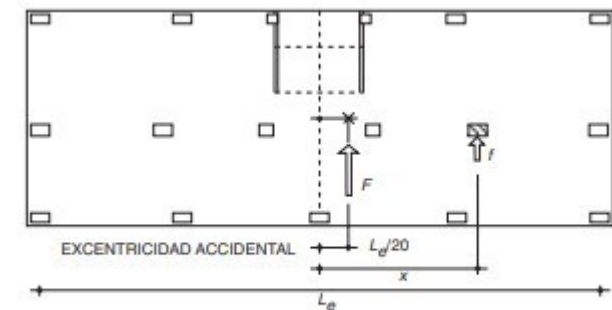


Figura 3.8. Efectos de rotación

# ANALISIS NO LINEAL

## INTEGRACION DIRECTA DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO

$$M \ddot{X} + C \dot{X} + F(t) = -M \ddot{X}g(t) \quad \text{..... (0)}$$

**Esquema Explícito** :  $X_{i+1}$  a partir de ec. (0) en  $t_i \rightarrow$  (No sistema);  $\Delta t$  Pequeño ; Estabilidad  
Ejemplo : Método de diferencias centrales visto en curso de puentes.

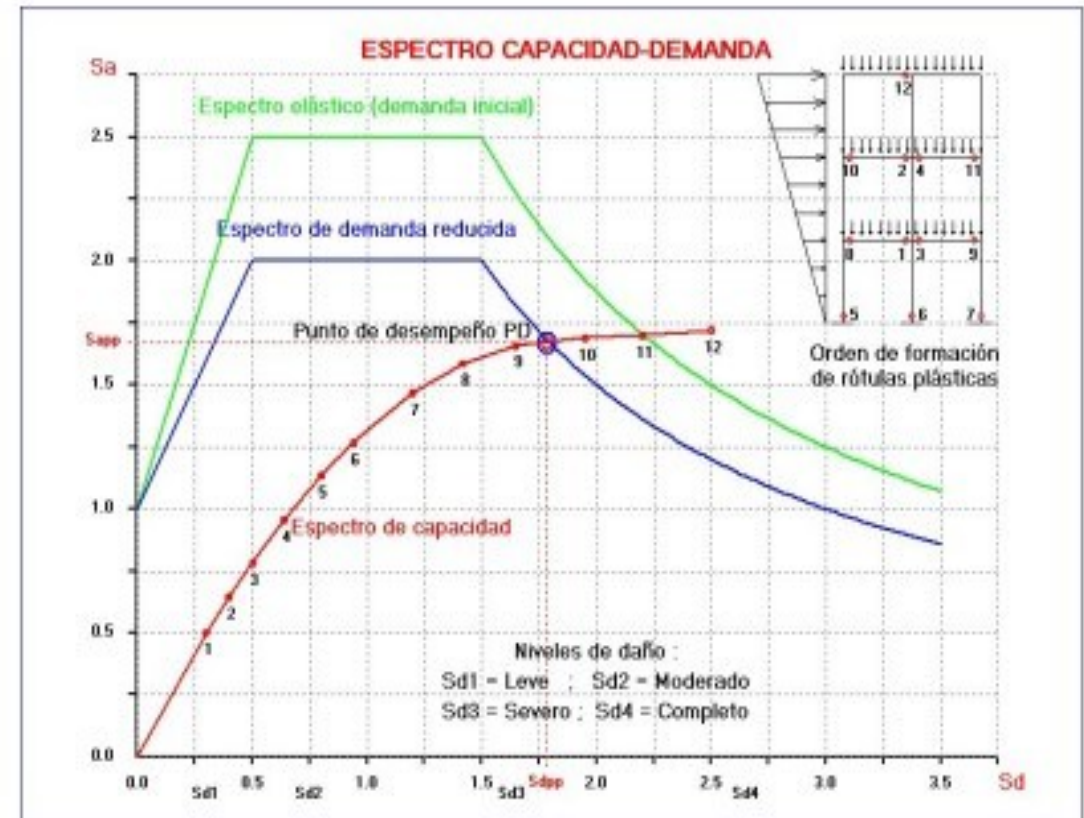
**Esquema Implícito** :  $X_{i+1}$  a partir de ec. (0) en  $t_{i+1} \rightarrow$  (sistema);  $\Delta t$  mayor ; Estable  
Métodos de Newmark, Houbolt y Wilson

Ejemplo : Método de Newmark . Ciclo de cálculo :

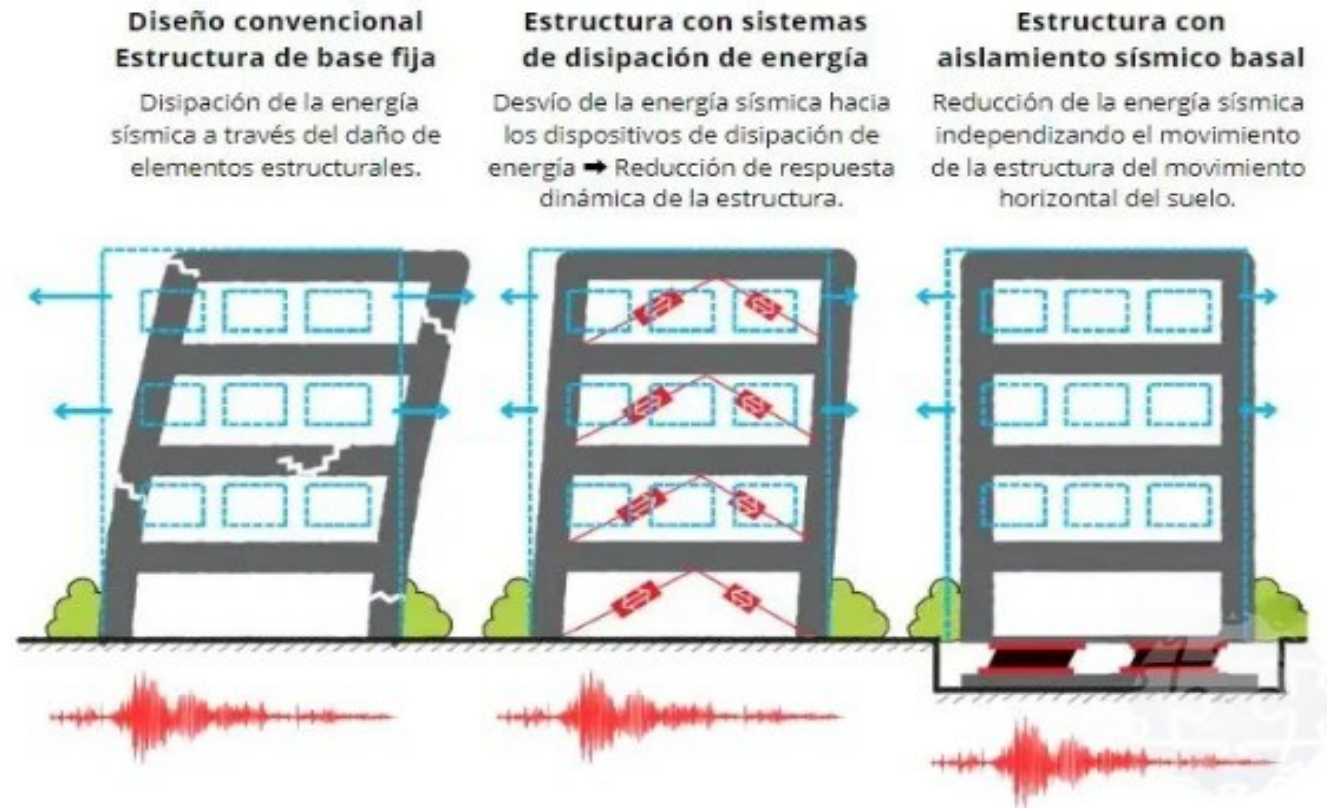
- 1.- Supuesto  $\ddot{X}_{i+1}$
- 2.-  $X_i, \dot{X}_i, \ddot{X}_i$  para  $t_i$
- 3.-  $\dot{X}_{i+1} = \dot{X}_i + (\ddot{X}_i + \ddot{X}_{i+1}) \Delta t / 2$
- 4.-  $X_{i+1} = X_i + \dot{X}_i \Delta t + (1/2 - \beta) \ddot{X}_i (\Delta t)^2 + \beta \ddot{X}_{i+1} (\Delta t)^2$
- 5.- Cálculo de  $\ddot{X}_{i+1}$  a partir de (0). Si (5) es diferente de (1) se repite el ciclo.  
 $\beta = 1/6$  aceleración lineal en  $\Delta t$  ,  $\beta = 1/4$  acel. Constante.  $\beta = 1/8$  acel. escalonada

# ANÁLISIS ESTÁTICO NO LINEAL

- Incremento de cargas laterales crecientes + gravitatorias fijas.
- Formación sucesiva de rótulas plásticas → Pérdida sucesiva de rigidez.
- Hasta alcanzar el colapso estructural o el nivel de daño deseado.
- Diagramas N-M y M-C seccionales.
- Patrones de carga lateral : Constantes, lineales o modales.
- Espectro ADSR de demanda reducida del sismo.
- Bilinealización de la curva de capacidad  $S_a$ - $S_d$  del edificio.
- Punto de desempeño PD ( $S_{dpd}$ ,  $S_{apd}$ ) por intersección – iterativa de los espectros de demanda y capacidad (ATC-40).



# AISLAMIENTO Y DISIPACION

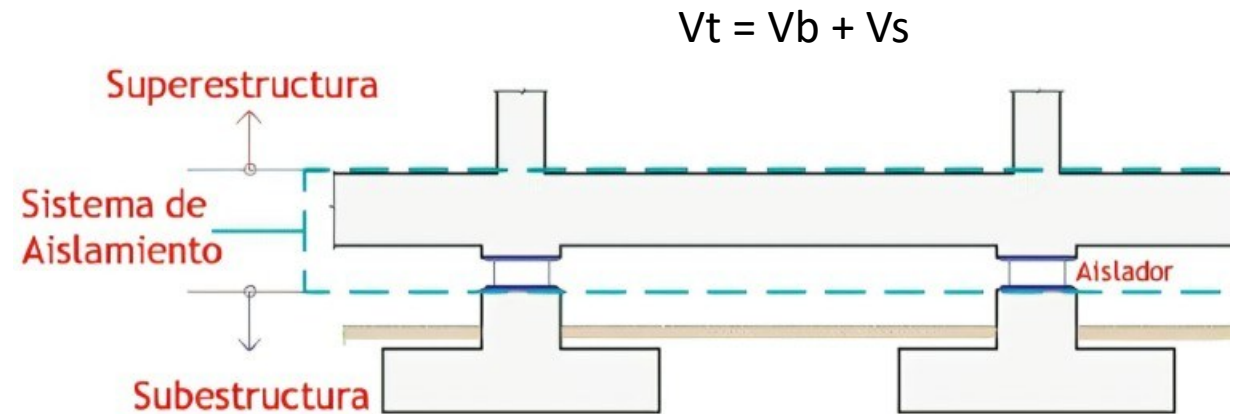


- \* Aislamiento entre la base de la superestructura y la cimentación ( desacoplándolas)
- \* Dispositivos disipativos o amortiguadores intercalados en la superestructura.  
(Disminuyen las aceleraciones, fuerzas y desplazamientos de entrepiso)

## Aisladores :



- NRB : Apoyos elastoméricos de caucho natural ( flexibilidad lateral)  
+ Placas intermedias de acero (rigidez vertical)  
Comportamiento Lineal. No ciclo histerético.
- HDR : Apoyos elastoméricos de alto amortiguamiento ( $\xi = 10\%$ )
- LRB : Caucho con núcleo de plomo (def. plásticas ; amortiguamiento  $\xi = 10$  a 30% . Bilineal . Disminuye fuerzas y desplazamientos y vert.
- Péndulos de fricción (simples, dobles y triples)





# Disipadores :

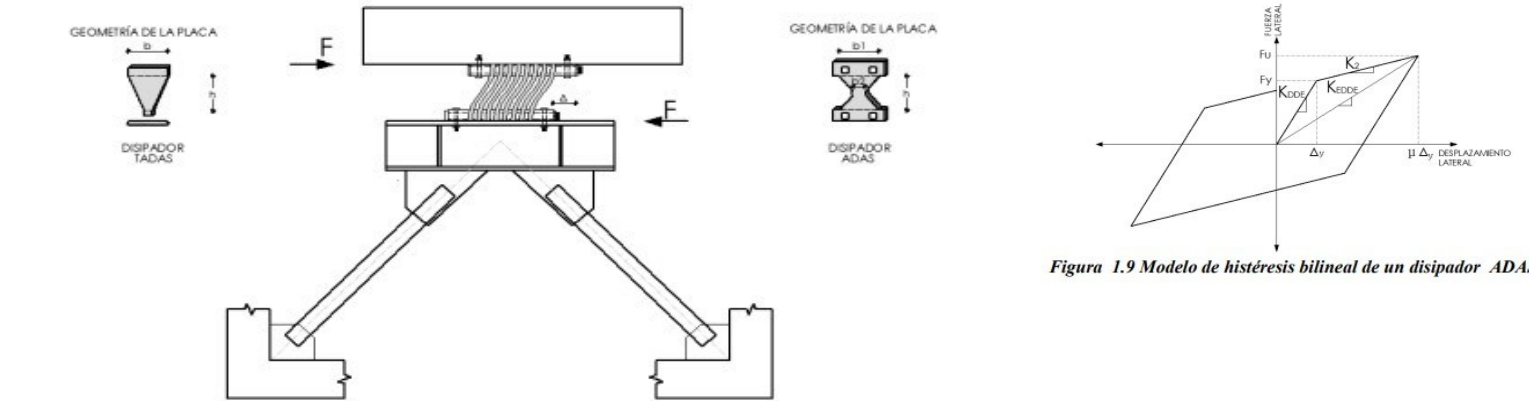
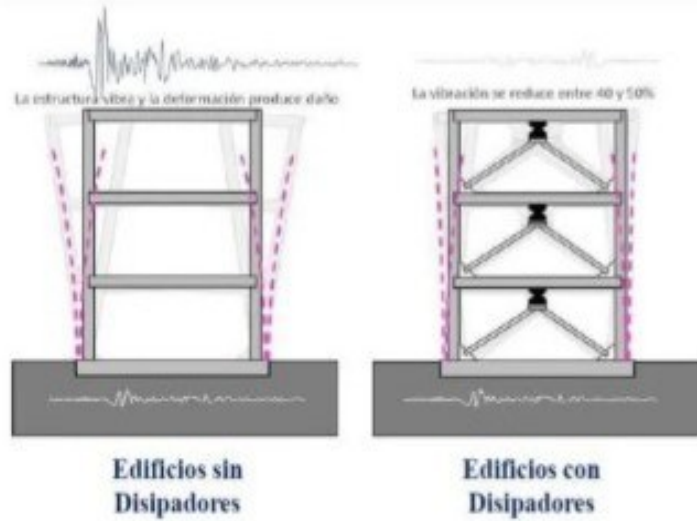


Figura 1.1 Disipadores de energía ADAS y TADAS sobre contraviento Chevrón.

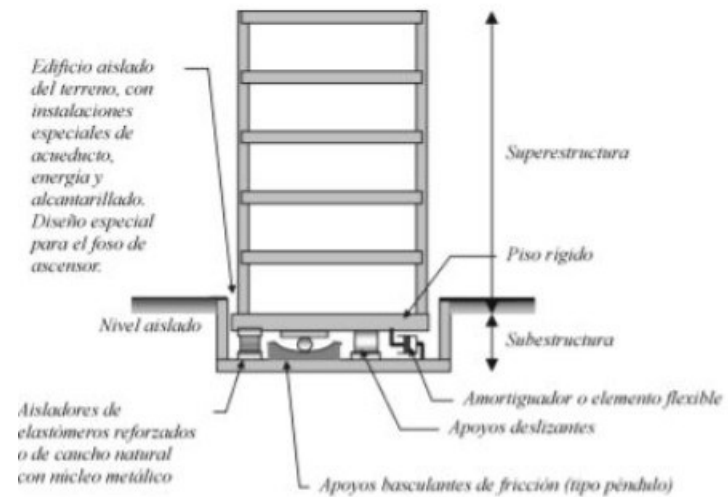
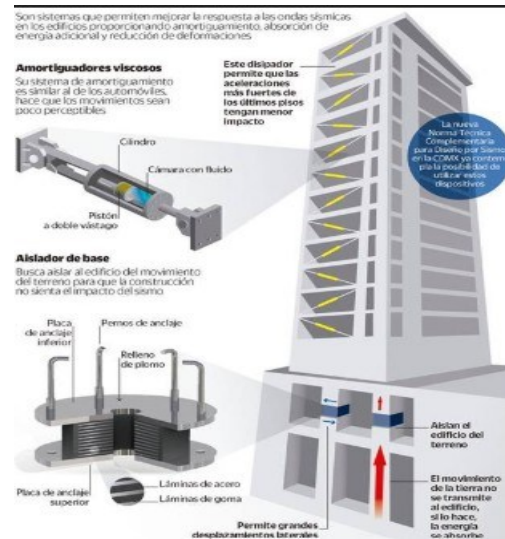


Figura 3. Técnica de aislamiento sísmico en la base

## EJEMPLO DE DISTRIBUCION ESPACIAL DE FUERZAS SISMICAS EN EL EDIFICIO

